

ÜBER DIE AUTOMORPHISMENGRUPPE
VON ROTO- UND FASCIAGRAPH

Walter Günther
Rembrandtstr. 12
5130 Geilenkirchen, W.-Germany

(Received: March 1983)

Der Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchung ist die folgende Situation: Ein Molekül läßt sich durch einen Graphen G darstellen, wobei die Ecken des Graphen den Atomen und die Kanten den chemischen Bindungen entsprechen. G ist dabei meist zusammenhängend. In der Chemie befaßt man sich auch mit dem Problem, gleiche Moleküle zu sogenannten Molekülketten zu verbinden, wobei zwischen je zwei benachbarten Molekülen stets dieselbe Art von Verbindung besteht. Die graphentheoretische Darstellung der Molekülkette nennt man *Fasciagraph*. Wird zusätzlich das erste Molekül mit dem letzten Molekül verbunden, so nennt man die entsprechende graphische Darstellung der geschlossenen Molekülkette wegen ihrer radförmigen Struktur *Rotograph*. Das Interesse gilt nun den Automorphismengruppen dieser beiden Graphen.

Man betrachte den Graphen nG , der aus n Exemplaren des (zusammenhängenden) Graphen G besteht. Es ist bekannt, daß die Automorphismengruppe des Graphen nG gleich dem Kranzprodukt aus der Automorphismengruppe des Graphen G mit der symmetrischen Gruppe S_n ist.

Im Laufe der Untersuchungen wird anhand von Beispielen gezeigt, daß die Automorphismengruppen von Fascia- und Rotographen nicht immer Untergruppen des o.g. Kranzproduktes sind. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, ein Verfahren aufzuzeigen, mit dessen Hilfe es möglich ist, den Durchschnitt des o.g. Kranzproduktes mit der Automorphismengruppe von Fascia- bzw. Rotograph zu berechnen. Am Schluß der Arbeit wird dies anhand eines Beispiels durchgeführt.

Vor Beginn der Ausarbeitung danke ich Herrn Prof. Dr. O.E. Polansky für die Anregung zur Beschäftigung mit dem vorliegenden Thema sowie für die weiterführenden Diskussionen im Verlaufe der Arbeit. Herrn Prof. Dr. A. Kerber danke ich für seine Hinweise zur Behandlung und Ausgestaltung des Themas, sowie für die kritische Durchsicht der Ausarbeitung. Schließlich gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. J. Neubüser vom Lehrstuhl D für Mathematik der RWTH Aachen für die freundliche Erlaubnis zur Benutzung der Rechananlage, sowie für sehr hilfreiche Diskussionen mit ihm und seinen Mitarbeitern.

1 Konstruktion von Roto- und Fasciagraph

Unter einem *Graphen* G versteht man (vgl. etwa Wagner (Lit. verz. [9])) ein Tripel, E, K, v , in Zeichen

$$G = (E, K, v).$$

Dabei sind E und K zwei elementfremde Mengen und v eine Vorschrift, die jedem $k \in K$ genau zwei verschiedene Elemente von E zuordnet. Die Elemente von E heißen die *Ecken* von G , während die Elemente von K *Kanten* von G heißen. Entsprechend heißt E die *Eckenmenge* von G und K die *Kantenmenge* von G . In $v(k) = \{a, b\}$ heißen a und b die *Endpunkte* von k . Man sagt, a und b *inzidieren* mit k oder auch, k *verbindet* a mit b . Sind zwei Ecken a und b durch die Kanten k_1, \dots, k_λ ($\lambda > 1$) verbunden, so heißen k_1, \dots, k_λ *Mehrfachkanten*. Zwei Ecken von G heißen in G *benachbart*, wenn sie durch eine Kante von G miteinander verbunden sind. Der *Grad* von a in G , bezeichnet mit $\gamma(a, G)$ oder auch $\gamma(a)$, ist die Anzahl der mit a inzidierenden Kanten. Ein Graph heißt *endlich*, wenn seine Eckenmenge E endlich ist. Gilt für zwei Graphen $G' = (E', K', v')$ und $G = (E, K, v)$ $E' \subseteq E$, $K' \subseteq K$ und $v(k) = v'(k)$ für jede Kante k von G' , so heißt G' *Teilgraph* von G , in Zeichen $G' \subseteq G$.

Im folgenden werden, sofern nichts anderes gesagt wird, nur endliche Graphen mit nicht leerer Eckenmenge und ohne Mehrfachkanten betrachtet.

Sei a_1, \dots, a_n ($n \geq 1$) eine Folge von Ecken im Graphen G . Jede Ecke a_v ($v = 1, \dots, n-1$) sei dabei mit der Ecke a_{v+1} durch eine Kante k_v von G verbunden. Der Teilgraph von G , der aus den Ecken a_1, \dots, a_n und den Kanten k_1, \dots, k_{n-1} besteht, heißt dann ein *Kantenzug* Z des Graphen G von a_1 nach a_n oder mit den Endpunkten a_1 und a_n , in Zeichen $Z = (k_1, \dots, k_{n-1})$ oder $Z = (a_1, \dots, a_n)$. Ein Kantenzug $Z = (a_1, \dots, a_n)$ heißt *geschlossen*, wenn $a_1 = a_n$, andernfalls heißt er *offen*. Die Länge eines Kantenzuges $Z = (k_1, \dots, k_{n-1})$ ist $n-1$. Ein Kantenzug $Z = (k_1, \dots, k_{n-1})$ heißt *einfach*, wenn die k_1, \dots, k_{n-1} lauter verschiedene Kanten sind. Ein Kantenzug $Z = (a_1, \dots, a_n)$ heißt *Weg*, wenn die a_1, \dots, a_n lauter verschiedene Ecken sind. Ein geschlossener Kantenzug $Z = (a_1, \dots, a_n)$ mit $n > 3$ heißt *Kreis*, wenn die a_1, \dots, a_{n-1} lauter verschiedene Ecken sind und $a_1 = a_n$.

Existiert zu je zwei Ecken a und b von G ein Kantenzug in G von a nach b , so heißt G *zusammenhängend*. Ein Graph heißt *Baum*, wenn er zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält. Ein Kantenzug heißt *a-Kantenzug*, wenn a ein Endpunkt dieses Kantenzuges ist. Die Vereinigung aller *a-Kantenzüge* von G heißt *Komponente von a in G* oder eine *Komponente von G*.

Nach diesen Festlegungen von Begriffen und Schreibweise kann nun zur Konstruktion von Roto- und Fasciagraph übergegangen werden.

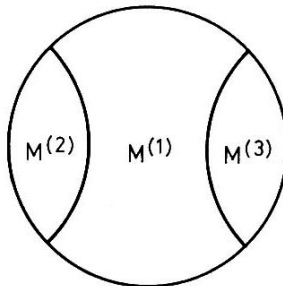
Man betrachte einen zusammenhängenden Graphen $G = (E, K, v)$. Dabei sei $E = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p)}\}$ die Menge der Ecken und $K = \{k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(q)}\}$ die Menge der Kanten des Graphen G . Die Eckenmenge E sei in drei Mengen $M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}$ zerlegt, so daß gilt

$$a) E = \bigcup_{v=1}^3 M^{(v)}$$

$$b) M^{(v)} \cap M^{(\mu)} = \emptyset \quad v, \mu = 1, 2, 3; v \neq \mu$$

$$c) |M^{(1)}| = m_1 \quad m_1 \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

$$|M^{(2)}| = |M^{(3)}| = m_2 \quad m_2 \in \mathbf{N}$$



G

Mit nG sei der Graph bezeichnet, der aus n disjunkten Exemplaren von G besteht. Die Komponenten von nG werden mit

$$G_0 = (E_0, K_0, v_0)$$

$$G_1 = (E_1, K_1, v_1)$$

⋮

$$G_{n-1} = (E_{n-1}, K_{n-1}, v_{n-1})$$

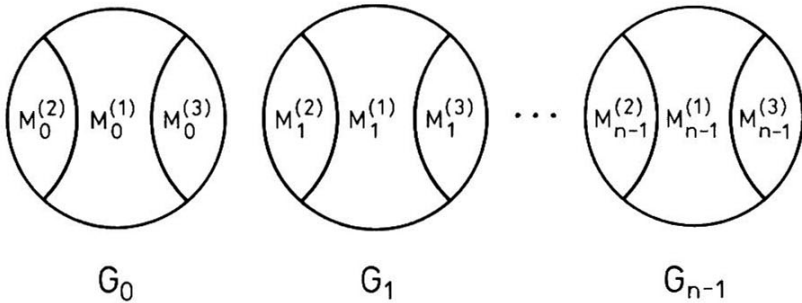
bezeichnet, wobei

$$E_i = \{a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \dots, a_i^{(p)}\} \text{ und}$$

$$K_i = \{k_i^{(1)}, k_i^{(2)}, \dots, k_i^{(q)}\}$$

die Menge der Ecken bzw. Kanten der Komponente G_i sind.

$M_i^{(\mu)}$ sei die der Menge $M^{(\mu)}$ des Graphen G entsprechende Menge der Komponente G_i ($\mu = 1, 2, 3$)



Aus dem Graphen nG soll nun durch Hinzunahme von neuen Kanten ein zusammenhängender Graph derart entstehen, daß G_0 mit G_1 , G_1 mit G_2, \dots, G_{n-1} mit G_0 verbunden ist, wobei zwischen den einzelnen Komponenten jeweils die "gleiche" Verbindung bestehen soll. Genauer:

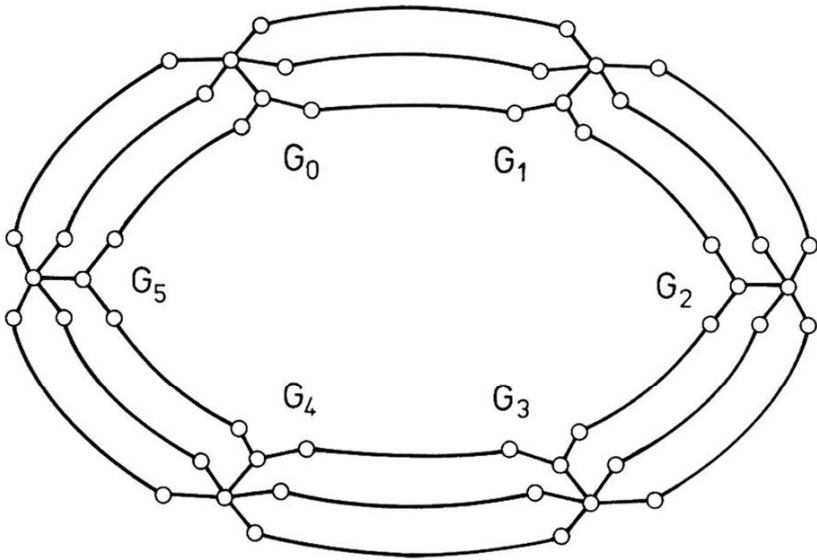
Es sei $\phi: M^{(3)} \rightarrow M^{(2)}$ eine bijektive Abbildung. Dann sei für alle i definiert

$$\phi_i: M_i^{(3)} \rightarrow M_j^{(2)}: a_i^{(\lambda)} \rightarrow a_j^{(\rho)}, \text{ wenn } \phi(a_i^{(\lambda)}) = a_j^{(\rho)}.$$

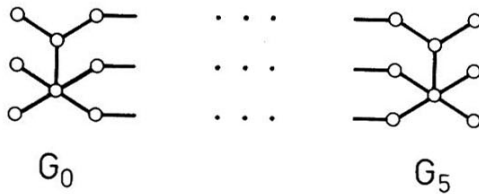
Dabei soll gelten $j \equiv i+1$ modulo n , so daß wir also Abbildungen haben $\phi_{n-1}: M_{n-1}^{(3)} \rightarrow M_0^{(2)}$, $\phi_0: M_0^{(3)} \rightarrow M_1^{(2)}$, ..., $\phi_{n-2}: M_{n-2}^{(3)} \rightarrow M_{n-1}^{(2)}$.

Man verbinde nun jeweils die Komponente G_i mit der Komponente G_{i+1} , indem man alle $k_{i,\lambda} := \{a_i^{(\lambda)}, \phi_i(a_i^{(\lambda)})\}$ mit $a_i^{(\lambda)} \in M_i^{(3)}$ als neue Kanten dem Graph nG hinzufügt. Der so entstandene, zusammenhängende Graph $R = \mathcal{R}(G, n, \phi)$ heißt wegen seiner radförmigen Struktur *Rotograph*. Läßt man in R die G_{n-1} mit G_0 verbindenden Kanten weg, so heißt der resultierende Graph *Fasciagraph* $F = F(G, n, \phi)$.

Ein Beispiel eines Rotographen ist:



Der entsprechende Fasciagraph sieht so aus:



2 Die Automorphismengruppe von nG

Gegeben seien zwei Graphen $G_1 = (E_1, K_1, v_1)$ und $G_2 = (E_2, K_2, v_2)$.

Eine bijektive Abbildung ϕ von E_1 auf E_2 heißt *Isomorphismus* von G_1 auf G_2 , wenn für je zwei Ecken a und b von G_1 gilt: a und b sind genau dann in G_1 benachbart, wenn $\phi(a)$ und $\phi(b)$ in G_2 benachbart sind. G_1 und G_2 heißen dann *isomorph*, in Zeichen $G_1 \cong G_2$. Ein Isomorphismus α eines Graphen G auf sich selbst heißt *Automorphismus* von G . Zwei Ecken a und b von G heißen *ähnlich*, wenn ein Automorphismus α von G existiert mit $\alpha(a) = b$.

Somit ist jeder Automorphismus α von G eine Permutation der Eckenmenge E , die die Relation "benachbart" erhält. Jeder Automorphismus α bildet demnach eine Ecke auf eine Ecke gleichen Grades ab. Die Automorphismen eines Graphen G bilden eine Permutationsgruppe $\text{Aut}(G)$ auf der Eckenmenge E .

Durch das Tripel (G, n, ϕ) ist die Struktur des Roto- bzw. Fasciagraphen (und damit auch die von $\text{Aut}(R)$ bzw. $\text{Aut}(F)$) eindeutig bestimmt. Wie aber hängen nun $\text{Aut}(G)$ und $\text{Aut}(R)$ bzw. $\text{Aut}(F)$ zusammen? Welche Rolle spielen dabei n und ϕ ? Dieser Frage wird im folgenden nachgegangen.

Bei der Konstruktion des Roto- bzw. Fasciagraphen führte der Weg vom Graphen G über den zusammengesetzten Graphen nG hin zu R bzw. F . Die entsprechende Reihenfolge wird auch bei der Diskussion der zugehörigen Automorphismengruppen eingehalten. Ebenso wie der Graph G als gegeben angenommen wurde, wird auch $\text{Aut}(G)$ als gegeben betrachtet.

Zur nachfolgenden Definition des Kranzproduktes zweier Gruppen vgl. auch Kerber [4].

2.1 Definition. Sei G eine Gruppe und H eine Permutationsgruppe auf der Menge $\underline{n} = \{1, \dots, n\}$.

Die Menge

$$G \sim H := \{(f; \pi) \mid f: \underline{n} \rightarrow G, \pi \in H\}$$

mit der Verknüpfung

$$(f; \pi)(f'; \pi') := (ff'_\pi; \pi\pi')$$

heißt *Kranzprodukt* von G mit H . Dabei sei für

$f: \underline{n} \rightarrow G$ und $\pi \in H$ die Abbildung $f_\pi: \underline{n} \rightarrow G$

definiert durch

$$f_\pi(\pi(i)) := f(i) \quad , \forall i \in \underline{n}$$

und für zwei Abbildungen $f, f': \underline{n} \rightarrow G$ das Produkt

$ff': \underline{n} \rightarrow G$ erklärt durch

$$ff'(i) := f(i)f'(i), \quad \forall i \in \underline{n} .$$

Mit Hilfe des Begriffes des Kranzproduktes läßt sich nun die Automorphismengruppe des Graphen nG angeben.

Es gilt nämlich (s. Harary [2] § 14)

2.2 Satz. Für jeden zusammenhängenden Graphen G gilt

$$\text{Aut}(nG) = \text{Aut}(G) \sim S_n.$$

Das folgende Beispiel mag diesen Satz erläutern.



G_0



G_1



G_2



G_3



G_4

Nach Satz 2.2 ist die Automorphismengruppe des Graphen $5G$:

$$S_4 \sim S_5.$$

Man erhält jeden Automorphismus von $5G$ dadurch, daß man zunächst die 5 (vollständigen) Graphen K_4 untereinander permutiert und danach auf jedem von ihnen irgendeinen Automorphismus ausführt.

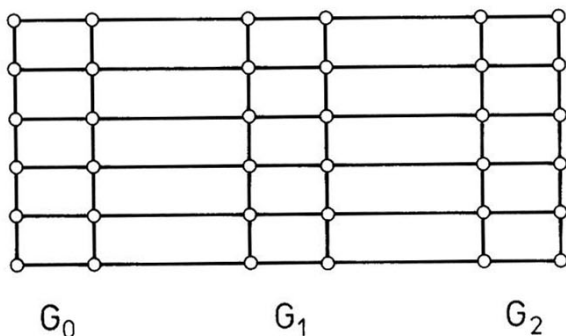
Damit ist der gewünschte Zusammenhang zwischen $\text{Aut}(G)$ und $\text{Aut}(nG)$ hergestellt. Im nächsten Paragraphen wird damit begonnen, die Beziehungen zwischen $\text{Aut}(nG)$ und $\text{Aut}(R)$ bzw. $\text{Aut}(F)$ zu diskutieren.

3 Diskussion der Beziehungen zwischen $\text{Aut}(nG)$ und $\text{Aut}(R)$
bzw. $\text{Aut}(F)$

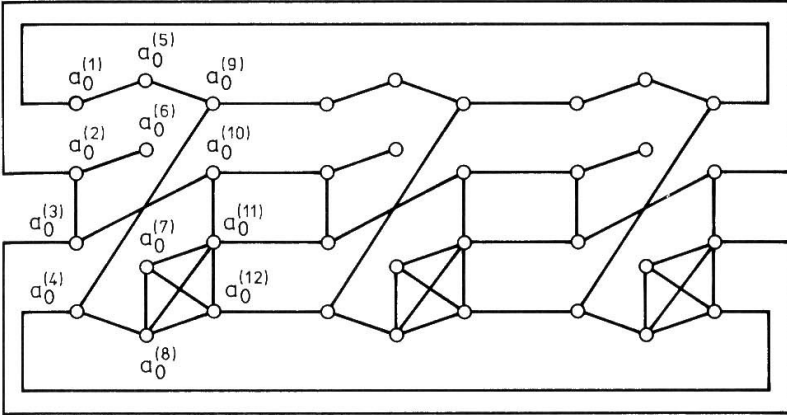
Die Frage, die sich nun stellt, lautet:

In welcher Beziehung stehen $\text{Aut}(nG)$ und $\text{Aut}(R)$ bzw. $\text{Aut}(F)$?

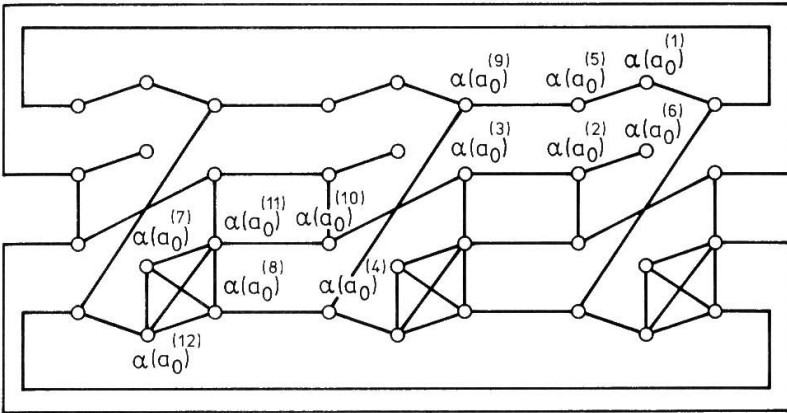
Man könnte zunächst vermuten, daß $\text{Aut}(R)$ und $\text{Aut}(F)$ Untergruppen des Kranzproduktes $\text{Aut}(G) \sim S_n$ sind. Wäre diese Vermutung richtig, so müßte durch einen Automorphismus α stets ein Teilgraph G_i auf einen Teilgraph G_j ($i, j=0, 1, \dots, n-1$) abgebildet werden. Das Beispiel



zeigt aber einen Fasciagraphen, der durch eine Drehung um 90° in sich überführt wird. Das nächste Beispiel zeigt einen Rotographen, bei dem die Bilder der Ecken des Teilgraphen G_0 zum Teil in dem Teilgraphen G_0 selbst, zum Teil in G_1 und zum Teil in G_2 liegen.



\mathcal{R}



$\alpha(\mathcal{R})$

Man erkennt dabei, daß durch die Hinzunahme von neuen Kanten zu nG , wie bei der Konstruktion von R und F geschehen, nunmehr Automorphismen auftreten können, die bei nG nicht möglich waren.

Aber auch die Umkehrung obiger Vermutung, nämlich $\text{Aut}(G) \sim S_n$ sei Untergruppe von $\text{Aut}(R)$ bzw. $\text{Aut}(F)$, ist im allgemeinen nicht richtig. So wird im Abschnitt 4.1 gezeigt, daß alle die Elemente $\alpha = (f; \pi)$ des Kranzproduktes $\text{Aut}(G) \sim S_n$, für die $\pi \in S_n \setminus D_n$ ($D_n =$ Diedergruppe) gilt, weder zu $\text{Aut}(R)$ noch zu $\text{Aut}(F)$ gehören können.

Im weiteren Verlauf der Untersuchungen werden nur noch Automorphismen aus

$$\text{Aut}'(R) := \text{Aut}(R) \cap (\text{Aut}(G) \sim S_n)$$

bzw.

$$\text{Aut}'(F) := \text{Aut}(F) \cap (\text{Aut}(G) \sim S_n)$$

mit $n \geq 3$ näher betrachtet. Dabei wird ein Konstruktionsverfahren zur Gewinnung eines Erzeugendensystems für $\text{Aut}'(R)$ und $\text{Aut}'(F)$ aufgezeigt.

4 Konstruktion der Gruppen $\text{Aut}'(R)$ und $\text{Aut}'(F)$

4.1 Überblick über das Konstruktionsverfahren

Jeder Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}'(R)$ läßt sich in der Form $\alpha = (f; \pi)$ darstellen. Da durch einen solchen Automorphismus zwei benachbarte Teilgraphen G_i und G_{i+1} auf zwei benachbarte Teilgraphen G_j und G_{j+1} abgebildet werden, müssen die Permutationen π aus der Diedergruppe D_n stammen. Alle anderen Permutationen würden nämlich diese "Nachbarschaftsrelation" verletzen.

Das gleiche Argument von der verletzten Nachbarschaftsrelation von Teilgraphen führt schließlich zu der Aussage, daß für $\alpha = (f; \pi) \in \text{Aut}'(F)$ gilt

$$\pi = 1 \text{ oder } \pi = \pi^{\circ} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Das oben angesprochene Konstruktionsverfahren wird in drei Schritten beschrieben. In den Abschnitten 4.2 bis 4.4 werden die Automorphismen behandelt, die sich in der Form

- a) $(e; \pi)$ mit $\pi \in C_n$
- b) $(f; 1)$
- c) $(f; \pi^{\circ})$

darstellen lassen. Daraus werden dann die Mengen $\text{Aut}'_{\nu}(R)$ und $\text{Aut}'_{\nu}(F)$ ($\nu = 1, 2, 3$) abgeleitet, von denen dann im Abschnitt 5 gezeigt wird, daß sie ein Erzeugendensystem für $\text{Aut}'(R)$ bzw. $\text{Aut}'(F)$ bilden.

4.2 Herleitung von $\text{Aut}_1(R)$ und $\text{Aut}_1(F)$

In diesem Abschnitt werden nur solche $\alpha \in \text{Aut}(G) \sim S_n$ betrachtet, die sich in der Form $\alpha = (e; \pi)$ mit $\pi \in C_n$ darstellen lassen.

Dabei kann festgestellt werden, daß diese α in jedem Fall zu $\text{Aut}'(R)$ gehören, da eine zyklische Vertauschung der G_i in R immer möglich ist. Das führt zu der Festlegung

$$\text{Aut}_1(R) := \{(e; \pi) \in \text{Aut}(G) \sim S_n \mid \pi \in C_n\}.$$

Wie man leicht sieht, ist $\text{Aut}_1(R)$ eine Gruppe.

Es gibt nur ein einziges der hier betrachteten α , das zu $\text{Aut}'(F)$ gehört, nämlich $\alpha = (e; 1)$. Das führt zu

$$\text{Aut}_1(F) := \{(e; 1)\}.$$

4.3 Herleitung von $\text{Aut}_2(R)$ und $\text{Aut}_2(F)$

In diesem Abschnitt sollen nur solche $\alpha \in \text{Aut}(G) \sim S_n$ betrachtet werden, die sich in der Form $\alpha = (f; 1)$ darstellen lassen.

Der folgende Satz sagt aus, daß ein Automorphismus

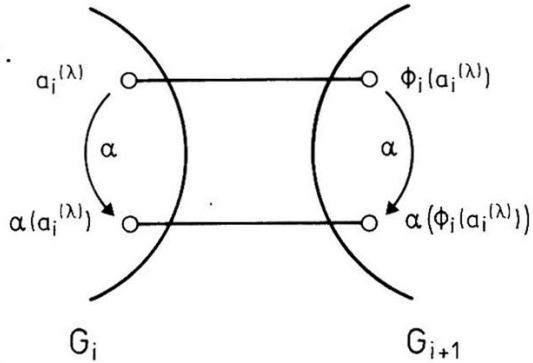
$\alpha = (f; 1) \in \text{Aut}(R)$ die Ecken aus einem G_i nur innerhalb der $M_i^{(\mu)}$ ($\mu = 1, 2, 3$) permutieren kann.

4.3.1 Satz. Für jeden Automorphismus $\alpha = (f; 1) \in \text{Aut}(R)$ gilt

$$a_i^{(\lambda)} \in M_i^{(\mu)} \Rightarrow \alpha(a_i^{(\lambda)}) \in M_i^{(\mu)} \quad i \in \mathbb{N} \bmod n; \mu = 1, 2, 3.$$

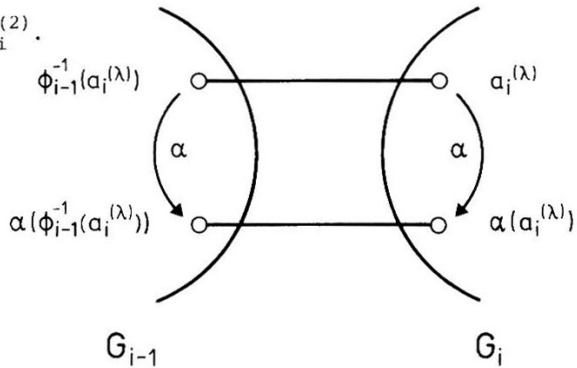
Beweis.

1. Fall: $a_i^{(\lambda)} \in M_i^{(3)}$.



Es gilt $(a_i^{(\lambda)}, \phi_i(a_i^{(\lambda)}))$ ist Kante in R . Da $\alpha \in \text{Aut}(R)$, folgt $(\alpha(a_i^{(\lambda)}), \alpha(\phi_i(a_i^{(\lambda)})))$ ist Kante in R . Weiterhin gilt $\alpha(a_i^{(\lambda)}) \in E_i$ und $\alpha(\phi_i(a_i^{(\lambda)})) \in E_{i+1}$. Aus E_i sind aber wegen $n \geq 3$ nur die Ecken aus $M_i^{(3)}$ zu Ecken aus E_{i+1} benachbart. D.h. $\alpha(a_i^{(\lambda)}) \in M_i^{(3)}$.

2. Fall: $a_i^{(\lambda)} \in M_i^{(2)}$.



$\alpha_i^{(\lambda)}$ ist mit $\phi_{i-1}^{-1}(a_i^{(\lambda)}) \in E_{i-1}$ verbunden, d.h. $(\phi_{i-1}^{-1}(a_i^{(\lambda)}), a_i^{(\lambda)})$ ist Kante in R . Damit ist auch $(\alpha(\phi_{i-1}^{-1}(a_i^{(\lambda)})), \alpha(a_i^{(\lambda)}))$ Kante in R . Weiterhin gilt $\alpha(a_i^{(\lambda)}) \in E_i$ und $\alpha(\phi_{i-1}^{-1}(a_i^{(\lambda)})) \in E_{i-1}$. Aus E_i sind aber wegen $n \geq 3$ nur die Ecken aus $M_i^{(2)}$ zu Ecken aus E_{i-1} benachbart, d.h. $\alpha(a_i^{(\lambda)}) \in M_i^{(2)}$.

3. Fall: $a_i^{(\lambda)} \in M_i^{(1)}$.

Es gilt $\alpha(a_i^{(\lambda)}) \in E_i$. Da $\alpha(M_i^{(2)}) = M_i^{(2)}$ und $\alpha(M_i^{(3)}) = M_i^{(3)}$, folgt aber $\alpha(a_i^{(\lambda)}) \in M_i^{(1)}$. x

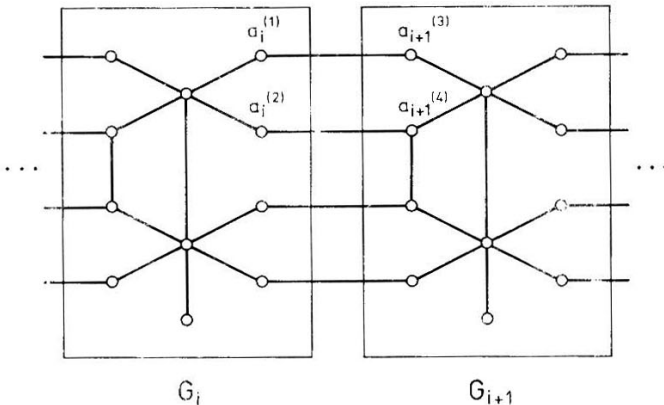
Aufgrund der Aussage des Satzes 4.3.1 kann nicht mehr jede Abbildung $f: \underline{n} \rightarrow \text{Aut}(G)$ zu einem Automorphismus $\alpha = (f; 1)$ von $\text{Aut}'(R)$ führen, d.h. der Wertevorrat von f kann eingeschränkt werden. So kommen als Werte keine $\beta \in \text{Aut}(G)$ vor, die eine Ecke $a^{(\lambda)} \in M^{(\mu)}$ in eine Ecke $a^{(\rho)} \in M^{(\nu)}$ ($\nu \neq \mu$) überführen. Das führt zu einer Untergruppe $\tilde{\text{Aut}}(G)$ von $\text{Aut}(G)$. Die Bahnen dieser Untergruppe sind Teilmengen $K^{(\mu)}$ von $M^{(\mu)}$ ($\mu=1,2,3$).

$$\tilde{\text{Aut}}(G) := \text{Aut}(G) \cap S_{M^{(1)}} \oplus S_{M^{(2)}} \oplus S_{M^{(3)}}$$

Reicht nun die oben vorgenommene Einschränkung von $\text{Aut}(G)$ auf $\tilde{\text{Aut}}(G)$ aus, um alle $\alpha = (f; 1) \in \text{Aut}'(R)$ zu beschreiben, d.h. gilt

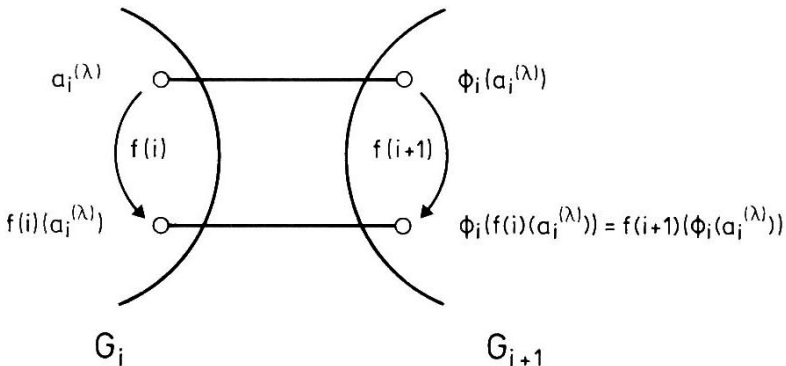
$$\{(f; 1) \mid f: \underline{n} \rightarrow \tilde{\text{Aut}}(G)\} \subseteq \text{Aut}'(R) ?$$

Das nächste Beispiel zeigt, daß dies nicht der Fall ist.



In $\widetilde{\text{Aut}}(G)$ existiert ein $\beta = f(i)$, das $a_i^{(1)}$ mit $a_i^{(2)}$ vertauscht. Gäbe es ein $\alpha = (f'; 1) \in \widetilde{\text{Aut}}'(R)$, das ebenfalls $a_i^{(1)}$ mit $a_i^{(2)}$ vertauscht, so müßte dieses α auch $a_{i+1}^{(3)}$ mit $a_{i+1}^{(4)}$ vertauschen. Das ist aber nicht möglich, da $\gamma(a_{i+1}^{(3)}) = 2$ und $\gamma(a_{i+1}^{(4)}) = 3$.

Dieses Beispiel zeigt, daß $f(i+1)$ nicht mehr unabhängig von $f(i)$ ist. Durch $f(i)$ wird nämlich die Permutation der Ecken aus $M_i^{(3)}$ festgelegt, womit auch die Permutation der Ecken aus $M_{i+1}^{(2)}$ schon vorgegeben ist, da diese nur noch in einer Weise permutiert werden können, daß ihre Nachbarschaftsrelationen zu den Ecken aus $M_i^{(3)}$ erhalten bleiben. Das bedeutet, $f(i+1)$ kann nicht mehr jeden Wert aus $\widetilde{\text{Aut}}(G)$ annehmen, sondern nur noch solche Werte, die die Ecken aus $M_{i+1}^{(2)}$ in "entsprechender" Weise permutieren wie $f(i)$ die Ecken aus $M_i^{(3)}$.



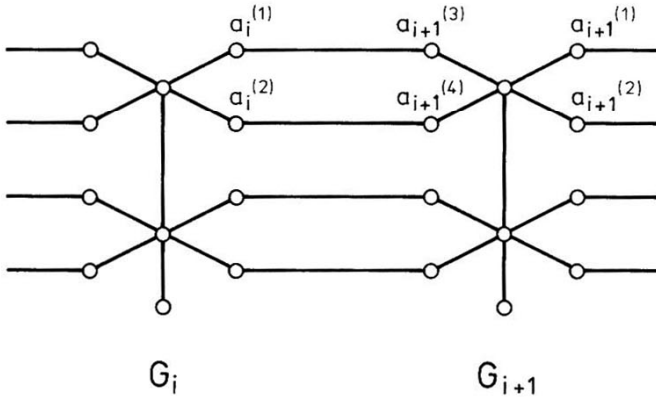
Dies führt zu folgender Definition.

4.3.2 Definition. Sei $f(i) \in \tilde{\text{Aut}}(G)$. Existiert ein $f(i+1) \in \tilde{\text{Aut}}(G)$ derart, daß für alle $a_i^{(\lambda)} \in M_i^{(3)}$ gilt

$$\phi_i(f(i)(a_i^{(\lambda)})) = f(i+1)(\phi_i(a_i^{(\lambda)})),$$

so heißt $f(i)$ Aut-fortsetzbar und $f(i+1)$ Aut-Fortsetzung von $f(i)$.

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Aut-Fortsetzung eines $f(i) \in \tilde{\text{Aut}}(G)$ im allgemeinen nicht eindeutig ist.



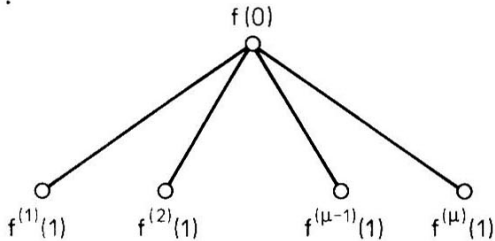
Sei $f(i)$ der Automorphismus aus $\tilde{\text{Aut}}(G)$, der $a_i^{(1)}$ mit $a_i^{(2)}$ vertauscht und alle anderen Ecken festhält. Dann sind sowohl $\bar{f}(i+1) \in \tilde{\text{Aut}}(G)$ als auch $\bar{\bar{f}}(i+1) \in \tilde{\text{Aut}}(G)$ Aut-Fortsetzung von $f(i)$, wobei $\bar{f}(i+1)$ der Automorphismus ist, der $a_{i+1}^{(3)}$ mit $a_{i+1}^{(4)}$ vertauscht und alle anderen Ecken festhält, während $\bar{\bar{f}}(i+1)$ der Automorphismus ist, der neben $a_{i+1}^{(3)}$ mit $a_{i+1}^{(4)}$ auch $a_{i+1}^{(1)}$ mit $a_{i+1}^{(2)}$ vertauscht und alle anderen Ecken unverändert läßt.

Aufgrund des letzten Beispiels liegt es nahe, jedem $f(i) \in \tilde{\text{Aut}}(G)$ alle $f(i+1) \in \tilde{\text{Aut}}(G)$ zuzuordnen, die $\tilde{\text{Aut}}$ -Fortsetzung von $f(i)$ sind. Sei

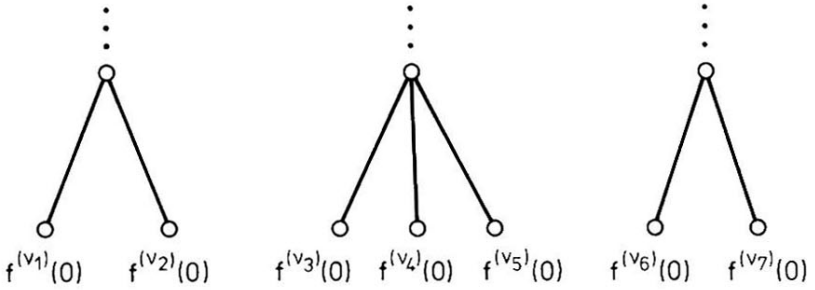
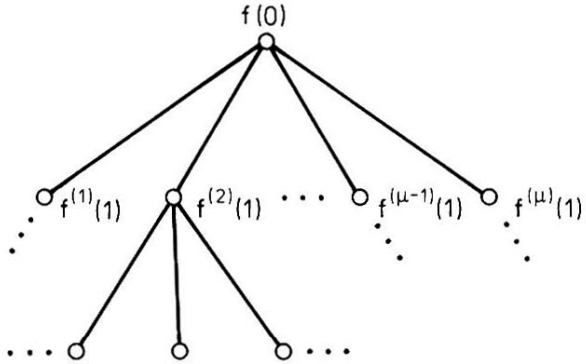
$$\begin{aligned} \tilde{\psi}: \tilde{\text{Aut}}(G) &\rightarrow P(\tilde{\text{Aut}}(G)) \text{ mit} \\ \tilde{\psi}(\beta) &= \{\beta' \in \tilde{\text{Aut}}(G) \mid \beta' \text{ ist } \tilde{\text{Aut}}\text{-Fortsetzung von } \beta\}. \end{aligned}$$

Mit dem Begriff der $\tilde{\text{Aut}}$ -Fortsetzung lassen sich alle $\alpha = (f; 1) \in \text{Aut}(\mathbb{R})$ beschreiben. Geht man nämlich von dem Teilgraphen G_o mit einem beliebigen $f(o) \in \tilde{\text{Aut}}(G)$ aus und setzt $f(o)$ auf ganz \mathbb{R} fort, so erhält man ein $\alpha = (f; 1) \in \text{Aut}'(\mathbb{R})$. Graphisch läßt sich dieser Vorgang wie folgt durch einen Baum darstellen.

Man zeichne zunächst eine Ecke und nenne sie $f(o)$. Sodann zeichne man so viele Ecken wie $\tilde{\psi}(f(o))$ Elemente hat, bezeichne sie wie die Automorphismen, die sie darstellen und verbinde sie mit $f(o)$.



Man kann nun, in der gleichen Weise wie vorher mit $f(o)$ getan, die $\tilde{\text{Aut}}$ -Fortsetzung der Automorphismen von $\tilde{\psi}(f(o))$ darstellen und in den ursprünglichen Baum integrieren. Durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens erhält man schließlich folgendes Bild.



Alle verschiedenen Wege in diesem Baum, die von $f(o)$ in der ersten Zeile zu $f^{(v_k)}(o) = f(o)$ in der $(n+1)$ -ten Zeile führen, repräsentieren einen Automorphismus aus $\text{Aut}'(R)$. Man erhält nun alle $\alpha = (f; 1) \in \text{Aut}'(R)$ dadurch, daß man $f(o)$ ganz $\tilde{\text{Aut}}(G)$ durchlaufen läßt, für jedes $f^{(v)}(o)$ wie oben einen Baum erzeugt und alle einen Automorphismus von R repräsentierenden Wege dieser Bäume vereinigt. Dies führt zu

$$\begin{aligned} \text{Aut}_2(R) : = \{ & (f; 1) \in \text{Aut}(G) \sim S_n \mid f(i) \in \tilde{\text{Aut}}(G), \\ & f(i+1) \in \tilde{\psi}(f(i)), i=0, 1, \dots, n-2; \\ & f(o) \in \tilde{\psi}(f(n-1)) \}. \end{aligned}$$

Es ist klar, daß $\alpha = (f; 1) \in \text{Aut}'(R) \Rightarrow \alpha \in \text{Aut}_2(R)$.

Leicht nachzurechnen ist:

4.3.3 Satz. $\text{Aut}_2(R)$ ist eine Gruppe.

Ähnliche Überlegungen lassen sich auch für Fasciagraphen anstellen. Zu beachten ist dabei, daß die "Randteilgraphen" G_o und G_{n-1} eine Sonderstellung einnehmen. Mit Blick auf Satz 4.3.1 läßt sich über G_o und G_{n-1} sagen, daß ein $\alpha = (f; 1) \in \text{Aut}'(F)$ jeweils $(M_o^{(2)} \cup M_o^{(1)})$, $M_o^{(3)}$, $M_{n-1}^{(2)}$ und $(M_{n-1}^{(1)} \cup M_{n-1}^{(3)})$ auf sich abbildet. D.h. es genügt hier nicht, wie bei Rotographen, den Wertevorrat von $\text{Aut}(G)$ generell auf $\tilde{\text{Aut}}(G)$ einzuschränken. Vielmehr müssen die Einschränkungen für G_o auf

$$\tilde{\text{Aut}}(G_0) := \text{Aut}(G) \cap S_{M(1) \cup M(2)} \oplus S_{M(3)}$$

und für G_{n-1} auf

$$\tilde{\text{Aut}}(G_{n-1}) := \text{Aut}(G) \cap S_{M(2)} \oplus S_{M(1) \cup M(3)}$$

vorgenommen werden, während für alle übrigen G_i , die Ein-

schränkung auf $\tilde{\text{Aut}}(G)$, wie bei Rotographen, vorzunehmen ist.

Es ist dann klar, wie der Begriff der $\tilde{\text{Aut}}$ -Fortsetzbarkeit aus

Definition 4.3.2 auf Fasciagraphen zu übertragen ist. Für die

Abbildung $\tilde{\psi}$ ergibt sich dann:

$i=0$:

$$\tilde{\psi}: \tilde{\text{Aut}}(G_0) \rightarrow P(\tilde{\text{Aut}}(G))$$

$$\tilde{\psi}(f(i)) = \{\beta' \in \tilde{\text{Aut}}(G) \mid \beta' \text{ ist } \tilde{\text{Aut}}\text{-Fortsetzung von } f(i)\}$$

$i=1, \dots, n-3$:

$$\tilde{\psi}: \tilde{\text{Aut}}(G) \rightarrow P(\tilde{\text{Aut}}(G))$$

$$\tilde{\psi}(f(i)) = \{\beta' \in \tilde{\text{Aut}}(G) \mid \beta' \text{ ist } \tilde{\text{Aut}}\text{-Fortsetzung von } f(i)\}$$

$i=n-2$:

$$\tilde{\psi}: \tilde{\text{Aut}}(G) \rightarrow P(\tilde{\text{Aut}}(G_{n-1}))$$

$$\tilde{\psi}(f(i)) = \{\beta' \in \tilde{\text{Aut}}(G_{n-1}) \mid \beta' \text{ ist } \tilde{\text{Aut}}\text{-Fortsetzung von } f(i)\}.$$

Auch hier kann man alle $\alpha = (f; 1) \in \text{Aut}'(F)$ mit Hilfe einer Baumstruktur darstellen. Im Unterschied zu Rotographen repräsentieren hier alle Wege des Baumes, die von einem $f(o)$ in der ersten Zeile zu einem $f^{(v_k)}(n-1)$ in der n -ten Zeile führen, einen Automorphismus aus $\text{Aut}'(F)$.

Analog zu $\text{Aut}_2(R)$ läßt sich schließlich auch ein $\text{Aut}_2(F)$ definieren, nämlich

$$\text{Aut}_2(F) := \{ (f;1) \in \text{Aut}(G) \sim S_n \mid f(0) \in \tilde{\text{Aut}}(G_0), \\ f(i) \in \tilde{\text{Aut}}(G) \text{ für } i=1, \dots, n-2, \\ f(n-1) \in \tilde{\text{Aut}}(G_{n-1}), f(i+1) \in \tilde{\psi}(f(i)) \text{ für } i=0,1, \dots, n-2 \}.$$

Es gilt auch die Satz 4.3.3 entsprechende Aussage für Fascia-graphen, d.h. $\text{Aut}_2(F)$ ist eine Gruppe.

Anmerkung: Eine rekursive Bestimmung von $\text{Aut}_2(F)$ läßt sich auch mit Hilfe "direkter Produkte mit vereinigter Faktorgruppe" (Huppert [3], § 9) von Automorphismengruppen formal beschreiben.

4.4 Herleitung von $\text{Aut}_3(R)$ und $\text{Aut}_3(F)$

In diesem Abschnitt sollen nur solche $\alpha \in \text{Aut}(G) \sim S_n$ betrachtet werden, die sich in der Form $\alpha = (f; \pi^{**})$ darstellen lassen.

$$(\pi^{**} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & n-1 \\ n-1 & \dots & 0 \end{pmatrix}).$$

4.4.1 Satz. Für jeden Automorphismus $\alpha = (f, \pi^{**}) \in \text{Aut}'(R)$ gilt

$$a_i^{(\lambda)} \in M_i^{(1)} \Rightarrow \alpha(a_i^{(\lambda)}) \in M_{\pi^{**}(i)}^{(1)}$$

$$a_i^{(\lambda)} \in M_i^{(2)} \Rightarrow \alpha(a_i^{(\lambda)}) \in M_{\pi^{**}(i)}^{(3)}$$

$$a_i^{(\lambda)} \in M_i^{(3)} \Rightarrow \alpha(a_i^{(\lambda)}) \in M_{\pi^{**}(i)}^{(2)}, \quad i \in \mathbb{N} \text{ mod } n.$$

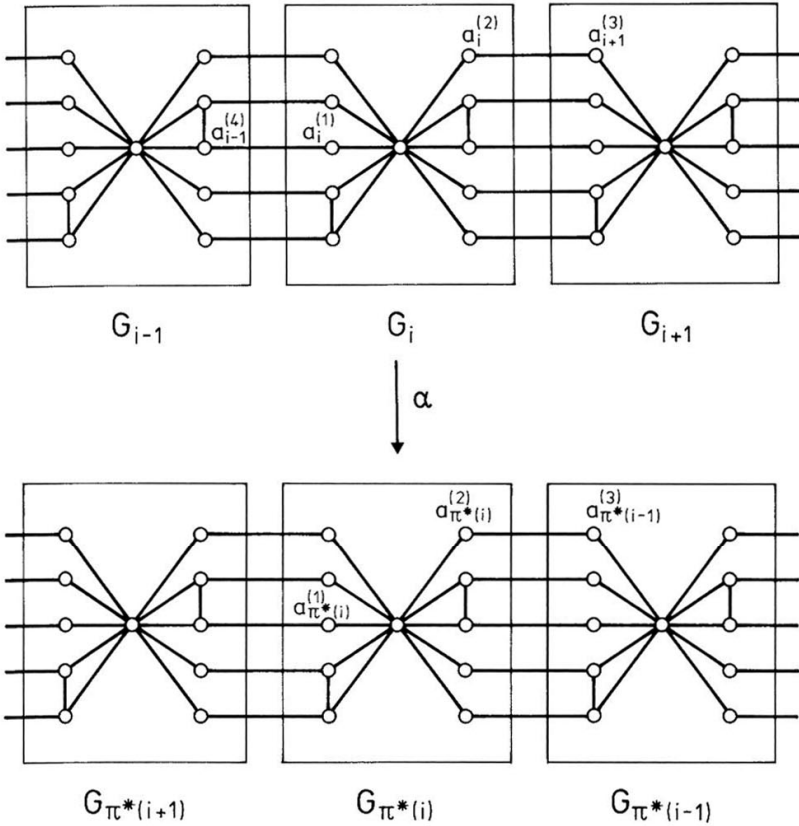
Beweis. Ähnlich wie 4.3.1

Aufgrund der Aussage des Satzes 4.4.1 kann nicht mehr jede Abbildung $f: \underline{n} \rightarrow \text{Aut}(G)$ zu einem Automorphismus $\alpha = (f; \pi^{**})$ von \mathcal{R} führen, d.h. auch hier kann der Wertevorrat von f eingeschränkt werden. Das führt zu

$$\tilde{\text{Aut}}(G) := \{ \beta \in \text{Aut}(G) \mid \beta(M^{(1)}) = M^{(1)}, \beta(M^{(2)}) = M^{(3)}, \\ \beta(M^{(3)}) = M^{(2)} \}.$$

Das nächste Beispiel zeigt, daß die vorgenommene Einschränkung von $\text{Aut}(G)$ auf $\tilde{\text{Aut}}(G)$ nicht ausreicht, um alle $\alpha = (f; \pi^{**}) \in \text{Aut}'(\mathcal{R})$ zu beschreiben.

Es existiert ein $\beta = f(\pi^{**}(i)) \in \tilde{\text{Aut}}(G)$, das $a_{\pi^{**}(i)}^{(1)}$ in $a_{\pi^{**}(i)}^{(2)}$ überführt. Gäbe es ein $\alpha = (f'; \pi^{**}) \in \text{Aut}'(\mathcal{R})$, das $a_i^{(1)}$ in $a_{\pi^{**}(i)}^{(2)}$ überführt, so müßte dieses α auch $a_{i-1}^{(4)}$ auf $a_{\pi^{**}(i-1)}^{(3)}$ abbilden. Das ist aber nicht möglich, da und $\gamma(a_{\pi^{**}(i-1)}^{(3)}) = 2$ und $\gamma(a_{i-1}^{(4)}) = 3$.

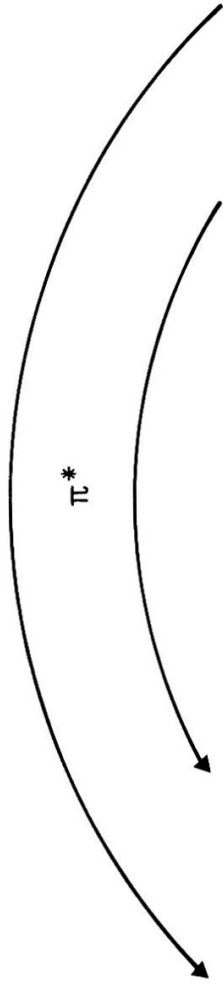
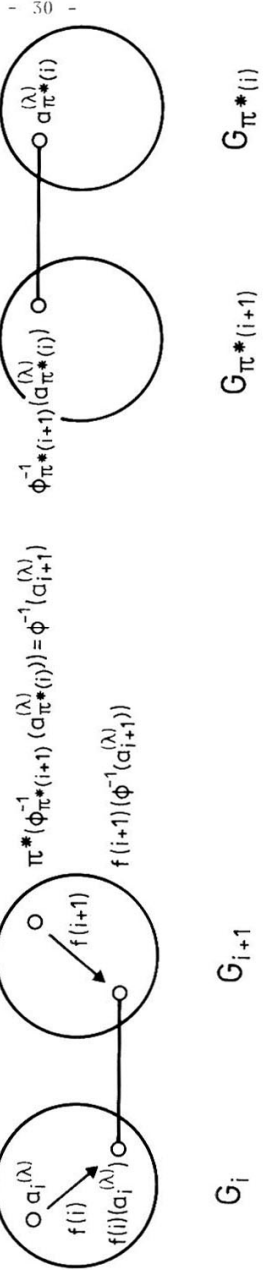


Dieses Beispiel zeigt auch, daß hier ebenfalls $f(i+1)$ nicht mehr unabhängig von $f(i)$ ist. Das führt zu folgender Definition.

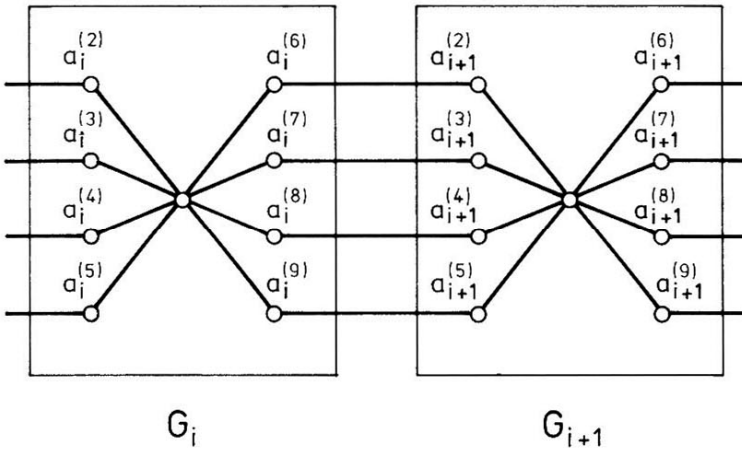
4.4.2 Definition. Sei $f(i) \in \tilde{\text{Aut}}(G)$. Existiert ein $f(i+1) \in \tilde{\text{Aut}}(G)$ derart, daß für alle $a_i^{(\lambda)} \in M_i^{(2)}$ gilt

$$\phi_i(f(i)(a_i^{(\lambda)})) = f(i+1)(\phi^{-1}(a_{i+1}^{(\lambda)})),$$

so heißt $f(i)$ $\tilde{\text{Aut}}$ -fortsetzbar und $f(i+1)$ $\tilde{\text{Aut}}$ -Fortsetzung von $f(i)$.



Das nächste Beispiel zeigt, daß auch die $\tilde{\text{Aüt}}$ -Fortsetzung eines $f(i) \in \tilde{\text{Aüt}}(G)$ im allgemeinen nicht eindeutig ist.



Sei

$$f(i) = (a_i^{(1)}) (a_i^{(2)} a_i^{(6)}) (a_i^{(3)} a_i^{(7)}) (a_i^{(4)} a_i^{(8)}) (a_i^{(5)} a_i^{(9)})$$

$$f'(i+1) = (a_{i+1}^{(1)}) (a_{i+1}^{(2)} a_{i+1}^{(6)}) (a_{i+1}^{(3)} a_{i+1}^{(7)}) (a_{i+1}^{(4)} a_{i+1}^{(8)}) (a_{i+1}^{(5)} a_{i+1}^{(9)})$$

$$f''(i+1) = (a_{i+1}^{(1)}) (a_{i+1}^{(2)} a_{i+1}^{(7)} a_{i+1}^{(3)} a_{i+1}^{(8)} a_{i+1}^{(4)} a_{i+1}^{(9)} a_{i+1}^{(5)} a_{i+1}^{(6)})$$

Dann sind sowohl $f'(i+1)$ als auch $f''(i+1)$ $\tilde{\text{Aüt}}$ -Fortsetzung von $f(i)$.

Aufgrund dessen liegt es nahe, jedem $f(i) \in \tilde{\text{Aüt}}(G)$ alle $f(i+1) \in \tilde{\text{Aüt}}(G)$ zuzuordnen, die $\tilde{\text{Aüt}}$ -Fortsetzung von $f(i)$ sind.

Sei

$\tilde{\psi}: \tilde{\text{Aüt}}(G) \rightarrow \mathcal{P}(\tilde{\text{Aüt}}(G))$ mit

$\tilde{\psi}(\beta) = \{\beta' \in \tilde{\text{Aüt}}(G) \mid \beta' \text{ ist } \tilde{\text{Aüt}}\text{-Fortsetzung von } \beta\}$.

Wie im Abschnitt 4.3 läßt sich auch hier die $\tilde{\text{Aüt}}$ -Fortsetzung eines $f(o) \in \tilde{\text{Aüt}}(G)$ auf ganz \mathbb{R} durch einen Baum darstellen. Dies führt zu

$$\text{Aut}_3(\mathbb{R}) := \{(f; \pi^{**}) \in \text{Aut}(G) \sim S_n \mid f(i) \in \tilde{\text{Aüt}}(G), \\ f(i+1) \in \tilde{\psi}(f(i)), i \in \mathbb{N} \text{ mod } n\}.$$

Es ist klar, daß $\alpha = (f; \pi^{**}) \in \text{Aut}'(\mathbb{R}) \Rightarrow \alpha \in \text{Aut}_3(\mathbb{R})$.

Man sieht sofort, daß $\text{Aut}_3(\mathbb{R})$ nie eine Gruppe ist,

da z.B. $(f; \pi^{**})(f; \pi^{**}) = (ff; \pi^{**}; 1) \notin \text{Aut}_3(\mathbb{R})$.

Da einerseits $\alpha_3 = \alpha_2 \in \text{Aut}_2(\mathbb{R})$ für alle $\alpha, \alpha_3 \in \text{Aut}_3(\mathbb{R})$ und andererseits $\alpha_2 \alpha_3^{-1} = \alpha \in \text{Aut}_3(\mathbb{R})$ für alle $\alpha_2 \in \text{Aut}_2(\mathbb{R})$ und alle $\alpha_3 \in \text{Aut}_3(\mathbb{R})$, genügt es, ein $\alpha_3 \in \text{Aut}_3(\mathbb{R})$ zu kennen, um mit Hilfe von $\text{Aut}_2(\mathbb{R})$ alle $\alpha \in \text{Aut}_3(\mathbb{R})$ zu erzeugen.

Ähnliche Überlegungen lassen sich auch für Fasciagraphen anstellen.

Wie im Abschnitt 2.2.2 ist auch hier zu beachten, daß die "Randteilgraphen" G_0 und G_{n-1} eine Sonderstellung einnehmen.

Ein $\alpha = (f; \pi'') \in \text{Aut}'(F)$ bildet ab:

$$\begin{array}{ccc} M_{\circ}^{(2)} \cup M_{\circ}^{(1)} & \xrightarrow{\alpha} & M_{n-1}^{(1)} \cup M_{n-1}^{(3)} \\ M_{\circ}^{(3)} & \xrightarrow{\alpha} & M_{n-1}^{(2)} \end{array}$$

Es genügt also nicht, wie bei Rotographen, den Wertevorrat von $\text{Aut}(G)$ generell auf $\tilde{\text{Aut}}(G)$ einzuschränken. Vielmehr müssen die Einschränkungen für G_{\circ} auf

$$\tilde{\text{Aut}}(G_{\circ}) := \{ \beta \in \text{Aut}(G) \mid \beta(M^{(2)}) = M^{(3)} \}$$

und für G_{n-1} auf

$$\tilde{\text{Aut}}(G_{n-1}) := \{ \beta \in \text{Aut}(G) \mid \beta(M^{(3)}) = M^{(2)} \}$$

vorgenommen werden, während für alle übrigen G_i die Einschränkung auf $\tilde{\text{Aut}}(G)$, wie bei Rotographen, vorzunehmen ist. Es ist dann klar, wie der Begriff der $\tilde{\text{Aut}}$ -Fortsetzbarkeit aus Definition 4.4.2 auf Fasciagraphen zu übertragen ist. Für die Abbildung $\tilde{\psi}$ ergibt sich dann:

$i=0$:

$$\tilde{\psi}: \tilde{\text{Aut}}(G_{\circ}) \rightarrow \mathcal{P}(\tilde{\text{Aut}}(G))$$

$$\tilde{\psi}(f(i)) = \{ \beta' \in \tilde{\text{Aut}}(G) \mid \beta' \text{ ist } \tilde{\text{Aut}}\text{-Fortsetzung von } f(i) \}$$

$i=1, 2, \dots, n-3$:

$$\tilde{\psi}: \tilde{\text{Aut}}(G) \rightarrow \mathcal{P}(\tilde{\text{Aut}}(G))$$

$$\tilde{\psi}(f(i)) = \{ \beta' \in \tilde{\text{Aut}}(G) \mid \beta' \text{ ist } \tilde{\text{Aut}}\text{-Fortsetzung von } f(i) \}$$

$i=n-2$:

$$\psi: \tilde{\text{Aut}}(G) \rightarrow P(\tilde{\text{Aut}}(G_{n-1}))$$

$$\psi(f(i)) = \{\beta' \in \tilde{\text{Aut}}(G_{n-1}) \mid \beta' \text{ ist } \tilde{\text{Aut}}\text{-Fortsetzung von } f(i)\}.$$

Schließlich läßt sich auch ein $\text{Aut}_3(F)$ wie folgt entsprechend definieren.

$$\begin{aligned} \text{Aut}_3(F) := \{ & (f; \pi^{\ddot{}}) \in \text{Aut}(G) \sim S_n \mid f(0) \in \tilde{\text{Aut}}(G_0), \\ & f(i) \in \tilde{\text{Aut}}(G) \text{ für } i=1, \dots, n-2, \\ & f(n-1) \in \tilde{\text{Aut}}(G_{n-1}), f(i+1) \in \psi(f(i)) \text{ für } i=0, 1, \dots, n-2 \} \end{aligned}$$

5 Erzeugendensysteme für $\text{Aut}'(R)$ und $\text{Aut}'(F)$

Da $\text{Aut}_1(R)$ und $\text{Aut}_2(R)$ Gruppen sind, folgt aus $\text{Aut}_1(R)\text{Aut}_2(R) = \text{Aut}_2(R)\text{Aut}_1(R)$ (was man leicht nachrechnet) $\text{Aut}_1(R)\text{Aut}_2(R)$ ist eine Gruppe.

Natürlich gilt dies auch für die Schnitte

$$\text{Aut}'(R) = \text{Aut}(R) \cap (\text{Aut}(G) \sim S_n) \quad \text{und}$$

$$\text{Aut}'(F) = \text{Aut}(F) \cap (\text{Aut}(G) \sim S_n).$$

Der folgende Satz sagt aus, daß die $\text{Aut}_i(R)$ bzw. $\text{Aut}_i(F)$ ($i=1,2,3$) Erzeugendensysteme für $\text{Aut}'(R)$ bzw. $\text{Aut}'(F)$ bilden. Da $\text{Aut}_1(F) = \{(e;1)\}$, wird jedoch darauf verzichtet, $\text{Aut}_1(F)$ als erzeugenden Faktor anzugeben.

5.1 Satz. Es gilt

$$\text{Aut}'(R) = \text{Aut}_1(R)\text{Aut}_2(R)(\text{Aut}_3(R) \cup \{(e;1)\})$$

und

$$\text{Aut}'(F) = \text{Aut}_2(F) (\text{Aut}_3(F) \cup \{(e;1)\}).$$

Beweis. Für jedes $\alpha \in \text{Aut}_1(R)\text{Aut}_2(R) (\text{Aut}_3(R) \cup \{(e;1)\})$ gilt $\alpha \in \text{Aut}(R) \cap (\text{Aut}(G) \sim S_n) = \text{Aut}'(R)$.

D.h.

$$\text{Aut}_1(R)\text{Aut}_2(R) (\text{Aut}_3(R) \cup \{(e;1)\}) \subseteq \text{Aut}'(R)$$

Entsprechend folgt

$$\text{Aut}_2(F) (\text{Aut}_3(F) \cup \{(e;1)\}) \subseteq \text{Aut}'(F)$$

Damit bleiben noch die umgekehrten Teilmengenbeziehungen zu zeigen.

Sei $\alpha = (f; \pi) \in \text{Aut}'(R)$.

1. Fall: $\pi \in C_n$

Dann gilt $\alpha = (f; \pi) = (e; \pi) (f_{\pi^{-1}}; 1)$

mit $(e; \pi) \in \text{Aut}_1(R)$ und $(f_{\pi^{-1}}; 1) \in \text{Aut}_2(R)$.

2. Fall: $\pi \in D_n \setminus C_n$

Dann gilt $\pi = \tilde{\pi} \pi^{\ddot{}}$ mit $\tilde{\pi} \in C_n$ und

$$\alpha = (f; \pi) = (e; \tilde{\pi}) (f_{\tilde{\pi}^{-1}}; \pi^{\ddot{}})$$

mit $(e, \tilde{\pi}) \in \text{Aut}_1(R)$ und $(f_{\tilde{\pi}^{-1}}; \pi^{\ddot{}}) \in \text{Aut}_3(R)$.

Damit gilt

$$\text{Aut}'(R) \subseteq \text{Aut}_1(R)\text{Aut}_2(R) (\text{Aut}_3(R) \cup \{(e;1)\}).$$

Sein nun $\alpha = (f, \pi) \in \text{Aut}'(F)$. Auch hier sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $\pi = 1$

Aus den Überlegungen im Abschnitt 4.3 folgt

$$(f; 1) \in \text{Aut}'(F) \Rightarrow (f; 1) \in \text{Aut}_2(F).$$

2. Fall: $\pi = \pi''$

Aus den Überlegungen im Abschnitt 2.2.3 folgt

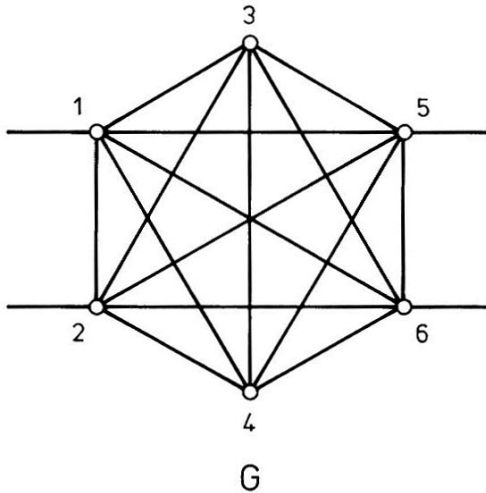
$$(f; \pi'') \in \text{Aut}'(F) \Rightarrow (f; \pi'') \in \text{Aut}_3(F).$$

Damit gilt

$$\text{Aut}'(F) \subseteq \text{Aut}_2(F) (\text{Aut}_3(F) \cup \{(e; 1)\}).$$

■

6 Anwendungsbeispiel



Sei $G = K_6$, d.h. der vollständige Graph mit 6 Ecken. Betrachtet werden nun $R(G, 4, \phi)$ und $F(G, 4, \phi)$, wobei $\phi(5) = 1$ und $\phi(6) = 2$. Es werden dann $\text{Aut}_i(F)$ und $\text{Aut}_i(R)$ für $i=2,3$ hergeleitet. Wie oben werden die Permutationen in Zykelschreibweise angegeben. Zur Form der nachfolgenden Darstellung sei auf Sims [8] verwiesen.

$\tilde{\text{Aut}}(G_O)$ wird erzeugt von

$$\beta_O^{(7)} : = (1\ 4)\ (2)\ (3)\ (5)\ (6)$$

$$\beta_O^{(6)} : = (1\ 3)\ (2)\ (4)\ (5)\ (6)$$

$$\beta_O^{(5)} : = (1\ 2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6)$$

$$\beta_O^{(4)} : = (1)\ (2\ 4)\ (3)\ (5)\ (6)$$

$$\beta_O^{(3)} : = (1)\ (2\ 3)\ (4)\ (5)\ (6)$$

$$\beta_O^{(2)} : = (1)\ (2)\ (3\ 4)\ (5)\ (6)$$

$$\beta_O^{(1)} : = (1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5\ 6)$$

$$e : = (1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6) \quad \text{Ordnung: } 48$$

$\tilde{\text{Aut}}(G)$ wird erzeugt von

$$\beta^{(3)} : = (1\ 2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6)$$

$$\beta^{(2)} : = (1)\ (2)\ (3\ 4)\ (5)\ (6)$$

$$\beta^{(1)} : = (1) (2) (3) (4) (5) (6)$$

$$e : = (1) (2) (3) (4) (5) (6) \quad \text{Ordnung: } 8$$

Aüt(G₃) wird erzeugt von

$$\beta_3^{(7)} : = (1) (2) (3) (4) (5) (6)$$

$$\beta_3^{(6)} : = (1) (2) (3) (6) (4) (5)$$

$$\beta_3^{(5)} : = (1) (2) (3) (5) (4) (6)$$

$$\beta_3^{(4)} : = (1) (2) (3) (4) (5) (6)$$

$$\beta_3^{(3)} : = (1) (2) (3) (4) (6) (5)$$

$$\beta_3^{(2)} : = (1) (2) (3) (4) (5) (6)$$

$$\beta_3^{(1)} : = (1) (2) (3) (4) (5) (6)$$

$$e : = (1) (2) (3) (4) (5) (6) \quad \text{Ordnung: } 48$$

$$(1) (5) (2) (6) (3) (4) = : \bar{\beta} \in \tilde{\text{Aüt}}(G_0), \tilde{\text{Aüt}}(G), \tilde{\text{Aüt}}(G_3)$$

Fasciagraph:

Aut₂(F) wird erzeugt von

$$(\beta_0^{(7)}, e, e, e; 1)$$

$$(\beta_0^{(6)}, e, e, e; 1)$$

$$(\beta_0^{(5)}, e, e, e; 1)$$

$$(\beta_0^{(4)}, e, e, e; 1)$$

$$(\beta_0^{(3)}, e, e, e; 1)$$

$$(\beta_0^{(2)}, e, e, e; 1)$$

$$(\beta_0^{(1)}, \beta^{(3)}, e, e; 1)$$

$$(e, \beta^{(2)}, e, e; 1)$$

$$(e, \beta^{(1)}, \beta^{(3)}, e; 1)$$

$$(e, e, \beta^{(2)}, e; 1)$$

$$(e, e, \beta^{(1)}, \beta_3^{(7)}; 1)$$

$$(e, e, e, \beta_3^{(6)}; 1)$$

$$(e, e, e, \beta_3^{(5)}; 1)$$

$$(e, e, e, \beta_3^{(4)}; 1)$$

$$(e, e, e, \beta_3^{(3)}; 1)$$

$$(e, e, e, \beta_3^{(2)}; 1)$$

$$(e, e, e, \beta_3^{(1)}; 1)$$

$$(e, e, e, e; 1)$$

Ordnung: 18.432

$$(\bar{\beta}, \bar{\beta}, \bar{\beta}, \bar{\beta}; \pi^{\ddot{}}) \in \text{Aut}_3(F)$$

Rotograph:

Aut₂(R) wird erzeugt von

$$(\beta^{(3)}, e, e, \beta^{(1)}; 1)$$

$$(\beta^{(2)}, e, e, e; 1)$$

$$(\beta^{(1)}, \beta^{(3)}, e, e; 1)$$

$$(e, \beta^{(2)}, e, e; 1)$$

$$(e, \beta^{(1)}, \beta^{(3)}, e; 1)$$

$$(e, e, \beta^{(2)}, e; 1)$$

$$(e, e, \beta^{(1)}, \beta^{(3)}; 1)$$

$$(e, e, e, \beta^{(2)}; 1)$$

$$(e, e, e, e; 1)$$

Ordnung: 256

$$(\bar{\beta}, \bar{\beta}, \bar{\beta}, \bar{\beta}; \pi^{\ddot{}}) \in \text{Aut}_3(R)$$

Literaturverzeichnis

- [1] Dörfler, W.; Mühlbacher, J.
Graphentheorie für Informatiker
Walter de Gruyter Verlag Berlin,
Sammlung Götschen 6016

- [2] Harary, F.
Graphentheorie
R. Oldenbourg Verlag München 1974

- [3] Huppert, B.
Endliche Gruppen I
Springer Verlag 1967

- [4] Kerber, A.
Representation of permutation groups I
Lecture Notes in Math. Bd. 240, Springer Verlag

- [5] McKay, B.D.
Computing automorphisms and canonical labellings
of graphs
Comb. Math., Proc. int. Conf., Canberra 1977,
Lecture Notes in Math. Bd. 686, S. 223-232

- [6] Polansky, O.E.; Tyutyulkov, N.N.
Structural graphs of regular polymers
and their properties
Match 3, S. 149-223

- [7] Reiffen, H.-J.; Scheja, G.; Vetter, U.
Algebra
BI Hochschultaschenbuch Bd. 110
- [8] Sims, C.C.
Computation with permutation groups
Proc. of the second Symposium on symbolic
and algebraic manipulation (Los Angeles,
Calif., 1971), edited by S.R. Petrick,
pp. 23-28 Assoc. comput. mach., New York, 1971
- [9] Wagner, K.
Graphentheorie
BI Hochschultaschenbuch Bd. 248