communications in mathematical
match
and in computer chemistry

32 (1995), 27-46

FORMALE BEGRIFFSANALYSE UND MATERIALKUNDE: Zur Archäometrie altägyptischer glasartiger Produkte

Hans-Georg Bartel

Institut für Chemie der Humboldt-Universität zu Berlin, Hessische Straße 1-2, 10115 Berlin

In memoriam FRITZ HINTZE (1915-1993), des verdienstvollen Förderers der Mathematik und Informatik in der Archäometrie, Ägyptologie und Meroitistik, aus Anlaß seines 80. Geburtstages am 18. April 1995

1. Zum Verhältnis von Archäometrie, Chemometrie und Mathematischer Chemie

Es ist vielleicht nicht sofort verständlich, wie eine Arbeit zu chemometrischen und archäometrischen Untersuchungen dem Gebiet der Mathematischen Chemie zugeordnet werden kann. Aus diesem Grunde seien kurze Anmerkungen über den Inhalt und das Anliegen der Wissenschaftskomplexe Chemometrie und Archäometrie an den Anfang der Ausführungen gestellt. „Chemometrie wurde definiert als eine chemische Disziplin, die mathematische und statistische Methoden (und Methoden der Informatik) anwendet, mit dem Zweck, optimale experimentelle, chemische Methoden zu entwichkeln oder auszuwählen, und mit dem Zweck, ein Maximum an relevanter, chemischer Information aus chemischen (Meß)-Daten zu erhalten." [1] (S. 131). Dieser Inhalts- und Zielbestimmung kann in Hinblick auf die Analytische Chemie die Feststellung an die Seite gestellt werden: „Darüber hinaus könnte die Chemometrik auch Elemente einer Theorie der Analytik liefern." [2] (S. 3). Weiterhin ist es möglich, „daß die Chemometrie ... eine ähnliche Rolle für die theoretische Chemie spielen kann, wie die Boltzmann- und Quantenstatistik für die Physik." [3] (S. 268).

Die Archäometrie ist zu einem guten Teil als eine Spezialisierung der Chemometrie mit archäologisch relevanter Fragestellung und Interpretation zu verstehen. Allgemein wird unter dieser Forschungsrichtung die „Untersuchung, Identifizierung und Altersbestimmung, auch Echtheitsnachweis und Konservierung archäologischer Objekte und Kunstgegenstände mittels naturwissenschaftl. (chemischer, physikalischer, mineralogischer, petrographischer, botanischer) Methoden" [4] verstanden. Die Rolle, welche verständlicherweise die Mathematik in der Archäometrie spielt, wird nicht zuletzt betont, wenn es im Zusammenhang mit dem "29th International Symposium on Archaeometry" 1994 in Ankara heißt: "The following scientific sessions will be included: ... 6. Mathematical methods and data management, ... " [5]. Wenn R.C.A. ROTTLÄNDER als vierten Schritt der archäometrischen Arbeit „Die ebenfalls wieder systemüberschreitende Übersetzung des naturwissenschaftlichen Ergebnisses in eine archäologische Auskunft oder einen archäologisch brauchbaren Befund" [6] (S. 11-12) nennt, so wird auch damit indirekt auf den notwendigen Einsatz mathematischer Methoden hingewiesen. Diese Anmerkungen mögen genügen, um die Richtigkeit der folgenden Aussagen anzudeuten: „Durch Anwendung und Auswahl geeigneter mathematischer Methoden ist die Archäometrie als Teilgebiet der Chemometrie zu verstehen." und „Chemometrie ist eine Teildisziplin der Mathematischen und damit der Theoretischen Chemie." Unter Benutzung der hier sicher akzeptierbaren Transitivität ist somit auch die Feststellung „Die Beschäftigung mit mathematischen Methoden im Rahmen der chemiebezogenen Archäometrie ist der Mathematischen Chemie zuzuordnen." als wahr anzuerkennen. Dann aber erhält der Satz von O.E. POLANSKY Bedeutung, der dem ersten Heft der Zeitschrift MATCH vorangestellt wurde: "The

goal of MATCH - Mathematical Chemistry - then, is to bridge the gap which currently exists between chemistry and mathematics." [7] (S. V).

2. Einige Grundbegriffe der Formalen Begriffsanalyse

Die chemische Analytik wird in der Archäometrie hauptsächlich mit dem Ziel eingesetzt, auf der Basis der chemischen Zusammensetzungen eine Klasseneinteilung vorzunehmen, aus welcher Fragen nach der Herkunft der unterschiedlichen Objekte, ihrer Technologie, dem Produktionsumfang, dem Warentransport u.a. einer Beantwortung näher gebracht werden (vgl. z.B. [8-10]). Die hierzu eingesetzten mathematischen Verfahren gehören der Cluster-, Faktoren- und Diskriminanzanalyse an. Als repräsentative Auswahl sei auf die Arbeiten [8,11-15] hingewiesen.

In der vorliegenden Arbeit soll die in der Darmstädter Schule der Verbandstheorie von R. WILLE entwickelte und bearbeitete Methode der explorativen Datenanalyse, die Formale Begriffsanalyse (FBA) [16,17], zur Anwendung kommen, die gegenüber den genannten Methoden der Klassifikation einige Vorteile aufweisen kann. Da ihre Grundlagen bereits im Rahmen der Theoretischen Chemie [18] als auch der Archäologie [19-21] eingeführt wurden, darf deren Darlegung hier in Kürze erfolgen. Auf ein einführendes Beispiel wird aber dennoch nicht verzichtet.

Ausgangspunkt der Betrachtungen der FBA ist ein (einwertiger) Kontext $\Gamma = (\mathbf{G},\mathbf{M},\mathbf{J})$. Hier bedeuten $\mathbf{G}$ die Gegenstands- und $\mathbf{M}$ die Merkmalsmenge. $\mathbf{J}$ ist eine binäre Relation zwischen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{M}$, also $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{G} \times \mathbf{M}$, wobei $\mathbf{gJm}$ gelesen wird als: „$\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ hat das Merkmal $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$". Als Beispiel wählen wir die vier (irdischen) Elemente des ARISTOTELES (384-322 v.Chr.) und die ihnen von ihm zugeordneten Eigenschaften, wie sie aus Abb. 1 abzulesen sind (vgl. z.B. S. 71 in [22] und S. 58 in [23]). Hier ist $\mathbf{G}_E$ = {Luft, Feuer, Erde, Wasser} und $\mathbf{M}_E$ = {warm, kalt, feucht, trocken}. Die Relation $\mathbf{J}_E$ ergibt sich aus der Abb. 1, so daß sich der Kontext ELEMENT in Form der Tabelle 1b darstellen läßt.

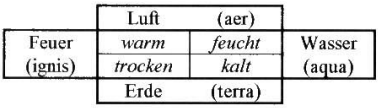


Abb. 1 Die Elemente des ARISTOTELES und ihre Grundeigenschaften

Tabelle 1 Kontexte zum Demonstrationsbeispiel (a: der mehrwertige Kontext QUALIS, b: der Kontext ELEMENT, c: die Skala SCGP1, d: die Skala SCGP2)
(F - Feuer, E - Erde, W - Wasser, L - Luft, w - warm, k -kalt, t - trocken, f -feucht
θ – θερμός, ψ – ψυχόρ, ξ – ξηρός, υ – ύγρός)

	Gp1	Gp2
F	θ	ξ
E	ψ	ξ
W	ψ	υ
L	θ	υ

a

	w	k	t	f
F	X		X	
E		X	X	
W		X		X
L	X			X

b

	w	k
θ	X	
ψ		X

c

	t	f
ξ	X	
υ		X

d

In Hinblick auf den Kontext Γ definieren wir die Menge A' der gemeinsamen Merkmale der Gegenstände einer Teilmenge $A \subseteq G$ und die Menge B' der Gegenstände, die alle Merkmale aus $B \subseteq M$ haben:

$$A' := \{m \in M \mid \forall\, g \in A : gJm\}$$
$$B' := \{g \in G \mid \forall\, m \in B : gJm\}.$$

Tabelle 2 zeigt für alle Teilmengen (einschließlich der gesamten Menge und der leeren Menge $\emptyset$) A von G_E und B von M_E des Kontexts ELEMENT die Mengen A' und B'.

Tabelle 2
Die Mengen A' und B' für alle Teilmengen von G_E und M_E des Kontexts ELEMENT
(Akürzungen wie in Tabelle 1)

$A \subseteq G_E$	A'		$B \subseteq M_E$	B'
FLWE	$\emptyset$	1	$\emptyset$	FLWE
FLW	$\emptyset$		wkf	$\emptyset$
FLE	$\emptyset$		wkt	$\emptyset$
LWE	$\emptyset$		wtf	$\emptyset$
FWE	$\emptyset$		ktf	$\emptyset$
FW	$\emptyset$		wk	$\emptyset$
FL	w	2	w	FL
FE	t	3	t	FE
LW	f	4	f	LW
WE	k	5	k	WE
LE	$\emptyset$		tf	$\emptyset$
F	wt	6	wt	F
L	wf	7	wf	L
E	kt	8	kt	E
W	kf	9	kf	W
$\emptyset$	wktf	10	wktf	$\emptyset$

Als formaler Begriff des Kontexts Γ wird jedes Paar (A,B) mit $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, $A' = B$ und $B' = A$ bezeichnet. A heißt der Umfang, B der Inhalt des Begriffs. Die Menge aller Begriffe zum Kontext Γ sei $\mathfrak{B}(\Gamma)$. Aus dem Kontext ELEMENT lassen sich zehn Begriffe bilden, die in der dritten Spalte der Tabelle 2 durch Nummern gekennzeichnet wurden.

Die Halbordnungsrelation $\leq$ in der Begriffsmenge $\mathfrak{B}(\Gamma)$ mit

$$(A,B) \leq (Y,Z) :\Leftrightarrow A \subseteq Y \;(:\Leftrightarrow Z \subseteq B),$$

wobei (A,B) und (Y,Z) Elemente von $\mathfrak{B}(\Gamma)$ sind, heißt Unterbegriffsrelation und ihre inverse Relation, also $\geq$, Oberbegriffsrelation. (A,B) ist dementsprechend ein Unterbegriff zum Oberbegriff (Y,Z). Die geordnete Menge $(\mathfrak{B}(\Gamma),\leq)$ bildet einen vollständigen Verband, den Begriffsverband. Graphisch läßt sich dieser in Form eines Liniendiagramms darstellen, dessen Konstruktion hier nicht wiederholt werden soll (s. dazu z.B. [16-19]). Das Liniendiagramm zum Begriffsverband des Kontexts ELEMENT zeigt Abb. 2.

Als Gegenstandsinhalt wird die Menge $g' = \{g\}' = \{m \in M \mid gJm\}$ zu einem Gegenstandes $g \in G$ bezeichnet. Entsprechend heißt $m' = \{m\}' = \{g \in G \mid gJm\}$ Merkmalsumfang von $m \in M$. Der Gegenstandsbegriff γg des Gegenstandes $g \in G$ und der Merkmalsbegriff μm des Merkmals $m \in M$ sind definiert als $\gamma g = (g'',g')$ bzw. $\mu m = (m',m'')$. Die Begriffe 6 bis 9 zum Kontext ELEMENT sind die vier Gegenstandsbegriffe, die Begriffe 2 bis 5 die vier Merkmalsbegriffe.

Aus dem Begriffsverband zu einem Kontext Γ kann man die Merkmalsimplikationen dieses Kontexts erhalten. Unter einer solchen versteht man ein Paar $P \rightarrow C$ von Teilmengen P und C von M, wobei die Implikation $P \rightarrow C$ im Kontext Γ gilt, wenn $P' \subseteq C'$ $(C \subseteq P'')$ gilt, d.h., wenn jeder Gegenstand aus G, der alle Merkmale aus P (Prämisse) hat, auch alle Merkmale von C (Conclusion) besitzt. Die Gültigkeit der Implikation $P \rightarrow C$ wird durch $P \Rightarrow C$ symbolisiert. Da die Anzahl der gültigen Implikationen eines Kontexts gewöhnlich sehr groß ist, benutzt man eine reduzierte Implikationsliste, aus welcher man mit Hilfe von wenigen Regeln alle übrigen Implikationen erzeugen kann. Eine solche Basis von Merkmalsimplikationen ist diejenige, die nach V. DUQUENNE und J.L. GUIGUES [24] aus dem Kontext gewonnen wird. Weiterführende Einzelheiten können unter anderem aus [16,17] und [25] entnommen werden.

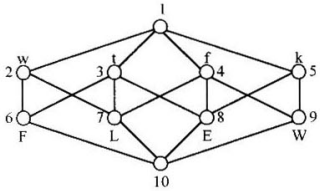


Abb.2 Liniendiagramm zum Begriffsverband des Kontexts ELEMENT (Abkürzungen wie in Tabelle 1)

Eine Datentabelle, in der mindestens ein Merkmal Werte mit mehr als einer Ausprägung annimmt, läßt sich durch einen mehrwertigen Kontext $\Xi = (G,M,W,R)$ beschreiben. G und M haben dieselbe Bedeutung wie im einwertigen Kontext Γ. W ist die Wertemenge und R eine ternäre Relation $R \subseteq G \times M \times W$, wobei das geordnete Tripel $(g,m,w) \in R$ gelesen wird als: „Der Gegenstand $g \in G$ besitzt beim Merkmal $m \in M$ die Ausprägung $w \in W$". Wenn man im Elementeschema des ARISTOTELES die Gegensatzpaare „warm/kalt" = Gp1 und „feucht/trocken" = Gp2 als Merkmale auffaßt, so ist das Schema der Abb. 1 in den mehrwertigen Kontext QUALIS (G_Q,M_Q,W_Q,R_Q) der Tabelle 1a überführbar. Die Gegenstandsmenge ist wieder G_Q = {Feuer, Erde, Wasser, Luft}, die Merkmalsmenge M_Q = {Gp1, Gp2} und die Wertemenge sei W_Q = {θερμός, ψυχρός, ξηρός, ύγρός }. Ein Element von R_Q ist z.B. (Wasser, Gp2, ύγρός).

Um die FBA zur Anwendung bringen zu können, muß ein gegebener mehrwertiger Kontext Ξ durch begriffliches Skalieren in einen einwertigen Γ überführt werden [26]. Dazu wird jedem Merkmal m ein einwertiger Kontext $\Gamma_S(m) = (G_S(m),M_S(m),J_S(m))$, die begriffliche Skala, zugeordnet. $G_S(m)$ sind die Ausprägungen, die das Merkmal m in Ξ anehmen kann. Die Merkmalsmenge $M_S(m)$ und die Relation $J_S(m)$ sind so zu wählen, daß der Begriffsverband von $\Gamma_S(m)$ eine für die Interpretation geeignete, möglichst klare begriffliche Struktur besitzt. (Weitere Einzelheiten über begriffliches Skalieren und begriffliche Skalen s. [26,39] sowie [18] und Abschnitt 6 (Anhang) dieses Aufsatzes.)

Im Falle des Kontexts QUALIS bietet sich für beide Merkmale je eine Nominalskala an, welche in Tabelle 1c bzw. 1d aufgeschrieben sind. Auch der Kontext ELEMENT kann als Skala aufgefaßt werden. Er ist äquivalent zur Vier-Krone bzw. zur zweidimensionalen dichotomen Skala. Die Grundbedeutung der letzteren ist die zweifache Dichotomie [26], was mit dem Anliegen des ARISTOTELES im Zusammenhang mit seiner Elementetheorie in Übereinstimmung ist. Andere Skalen werden unten genannt werden.

Abschließend sei bemerkt, daß zum Aufsuchen der Begriffe eines Kontexts, der Bestimmung des Begriffsverbandes, der DUQUENNE-GUIGUES-Implikationenbasis usw. von B. GANTER sehr effektive Algorithmen erarbeitet wurden [27], die dem außerordentlich komfortablen Programm ConImp von P. BURMEISTER [28], mit welchem auch die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit erzielt wurden, zugrundeliegen.

3. Der mehrwertige Kontext (Datenmatrix) und dessen Skalierung

Als Beispiel aus der Archäometrie wenden wir uns den Untersuchungen von M.S. TITE und M. BIMSON [29,30] zu. Sie betreffen die chemische Zusammensetzung glasartiger Materiali-

en aus den Sammlungsbeständen des Britischen Museums in London, die vornehmlich aus Ägypten stammen. In Tabelle 3 sind die mitgeteilten Analysenergebnisse zusammengestellt, während Tabelle 4 Auskunft über den Materialtyp, die Herkunft und die zeitliche Einordnung der Proben gibt. Die Abkürzungen des Materialtyps bedeuten: ÄB - Ägyptischblau(-Fritte), St - glasierter Stein (Steatit), Fr - Fritte, gF - glasige Fayence, FC, FD, FE, FG - Fayencen (unterschieden nach der Herstellungsart: C - cementation, D - direct application of glazing mixture, E - efflorescence, G - addition of ground glass), die spezielle Terminologie kann aus [29] entnommen werden. Zu den Herkunftsorten in Ägypten werden gewissermaßen zum Vergleich Ninive in Mesopotamien und die Mittelmeerinsel Malta hinzugenommen. Die zeitliche Zuordnung wurde in der vorliegenden Arbeit wegen der kürzeren, zugleich ausreichenden Übersicht auf die altägyptischen Dynastien bezogen, wobei die Zeittabelle von E. HORNUNG [30] benutzt wurde. Im weiteren wird statt der Inventarnummer des British Museum zur Probenbezeichnung die in Tabelle 3 bzw. 4 angegebene Ziffer verwendet.

Tabelle 3 Die chemische Zusammensetzung der Proben nach [29,30]

Probe		Masse-%							
Nr.	Name	SiO_2	CaO	CuO	Na_2O	K_2O	MgO	Al_2O_3	FeO
01	BMRL 14121	64,5	9,4	20,9	0,9	0,0	0,7	1,2	2,4
02	BMRL 13714	65,9	13,2	18,8	0,4	0,2	0,7	0,4	0,4
03	EA 23318	68,0	0,2	0,0	0,4	0,0	31,0	0,4	0,0
04	EA 5570	70,2	12,3	13,8	2,4	0,2	0,6	0,5	0,0
05	BMRL 14414	76,6	8,7	10,7	1,6	0,5	0,4	0,6	0,9
06	EA 5561	75,1	11,3	6,9	5,5	0,8	0,0	0,4	0,0
07	EA 5559	75,3	11,4	6,2	6,6	0,0	0,0	0,5	0,0
08	EA 5564	74,4	12,3	6,1	5,9	0,7	0,0	0,6	0,0
09	EA 34095	79,1	6,9	2,1	9,7	0,3	0,5	0,8	0,6
10	EA 26975	82,0	6,8	2,2	4,0	2,1	0,5	1,7	0,7
11	BMRL 23180	90,6	0,6	1,4	2,8	0,9	0,8	2,7	0,2
12	BMRL 23179	91,4	0,3	0,7	2,9	1,0	0,6	1,9	0,5
13	BMRL 23181	91,1	0,5	0,0	4,1	1,0	0,6	2,7	0,0
14	BMRL 26946	89,7	0,9	0,0	4,0	1,0	0,7	3,4	0,0
15	BMRL 26943	94,2	0,4	0,9	2,1	0,8	0,3	1,3	0,0
16	BMRL 16321	96,6	0,5	1,3	1,1	0,5	0,0	0,0	0,0
17	TD 33	99,3	0,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3	0,0
18	BMRL 16323	98,1	0,2	0,0	0,9	0,2	0,6	0,0	0,0
19	TD 523	99,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,5	0,5

Eine Klassifikation der Objekte aus glasartigem Material verfolgt in erster Linie das Ziel, mit Hilfe der chemischen Analyse (und gegebenenfalls mikroskopischer Beobachtungen) die Einordnung einer Einzelprobe in die entsprechende Materialgruppe vornehmen zu können, was auf rein optischem Wege nicht immer oder nur irrtumbehaftet möglich ist.

Zu dieser Klassifikation sollen die Hilfsmittel der FBA herangezogen werden und einige ihrer Vorteile im Vergleich mit Methoden der hierarchischen und nichthierarchischen Cluster-Analyse dargestellt werden. Bei diesem Vorgehen dient die Tabelle 3 als mehrwertiger Kontext. Die Gegenstandsmenge wird von den 19 Proben gebildet, die Merkmalsmenge von den Konzentrationen der acht genannten Oxide. Die Elemente der Wertemenge stellen die einzelnen Ausprägungen der Oxidgehalte dar.

Tabelle 4 Materialtyp, Fundort und zeitliche Einordnung der Proben (Abkürzungen s. Text)

Probe	*Material*	*Herkunft*	*Dynastie*	*Nr.*
BMRL 14121	ÄB	Malta	römisch	01
BMRL 13714	ÄB	Ninive	22-25	02
EA 23318	St	Ägypten	18-20	03
EA 5570	ÄB	Theben	18-20	04
BMRL 14414	ÄB	Ägypten	26	05
EA 5561	Fr	Theben	18-20	06
EA 5559	Fr	Theben	18-20	07
EA 5564	Fr	Theben	18-20	08
EA 34095	gF	Ägypten	25-26	09
EA 26975	gF	Ägypten	25-26	10
BMRL 23180	FE	Karnak	18-20	11
BMRL 23179	FE	Karnak	18-20	12
BMRL 23181	FG	Karnak	18-20	13
BMRL 26946	FG	Karnak	18-20	14
BMRL 26943	FE	Karnak	18-20	15
BMRL 16321	FE	Ägypten	18	16
TD 33	FD	Tell el Dabʿa	19	17
BMRL 16323	FC	Ägypten	21	18
TD 523	FC	Tell el Dabʿa	16-17	19

Als Vorbereitung für die Skalierung dieses Kontexts wurden die Konzentrationen für jedes Oxid in Intervalle eingeteilt, die einerseits bezüglich ihres Umfangs sinnvoll, andererseits im Sinne der Datenreduktion nützlich sind. Diese Einteilung ist in Tabelle 5 gezeigt. Für SiO_2 wird eine ordinale, für die anderen Oxidgehalte eine biordinale Skala benutzt.

Ein Beispiel für den letzteren Typ ist in Abb. 3 gegeben. Ihre grundlegende Bedeutung ist eine Ordination bei gleichzeitiger Klassifikation. Hier wurde in die beiden Klassen „mit" und „ohne" (Gehalt an entsprechendem Oxid) zerlegt, wobei die erstere zu einer nach steigendem Oxidgehalt angeordneten Kette verfeinert wurde. Das Liniendiagramm einer Ordinalskala ist eine Kette. Würde man im Kontext von Abb. 3 die erste Zeile und erste Spalte streichen, so erhielte man den Kontext einer ordinalen Skala, deren Liniendiagramm die rechte Kette in Abb. 3 (Knoten a bis e) wäre.

Das Ergebnis der Skalierung ist der einwertige Kontext VITMAT (Tabelle 6). Die Punkte dienen nur der Lesehilfe. Die Merkmale wurden durch „jE" bezeichnet, wobei j die Intervallnummer nach Tabelle 5 und E die Bezeichung des chemischen Elements in der Oxidformel E_mO_n ist.

Tabelle 5 Intervalle [Masse%] und (Anzahl der Gegenstände)

Int.-Nr.	SiO_2	CaO	CuO	Na_2O
0		0 (1)	0 (6)	0 (2)
1	64,5-65,9 (2)	0,2-0,9 (9)	0,7-2,2 (6)	0,4 (2)
2	68,0-70,2 (2)	6,8-6,9 (2)	6,1-6,9 (3)	0,9-1,6 (4)
3	74,4-76,6 (4)	8,7-9,4 (2)	10,7 (1)	2,1-2,9 (4)
4	79,1 (1)	11,3-11,4 (2)	13,8 (1)	4,0-4,1 (3)
5	82,0 (1)	12,2-12,3 (2)	18,8-20,9 (2)	5,5-6,6 (3)
6	89,7-91,4 (4)	13,2 (1)		9,7 (1)
7	94,2 (1)			
8	96,6-99,3 (4)			
Int.-Nr.	**K_2O**	**MgO**	**Al_2O_3**	**FeO**
0	0 (5)	0 (6)	0 (2)	0 (11)
1	0,2-0,3 (4)	0,3 (1)	0,3-0,8 (10)	0,2 (1)
2	0,5 (2)	0,4-0,5 (3)	1,2-1,3 (2)	0,4-0,5 (3)
3	0,7-0,9 (4)	0,6-0,7 (7)	1,7-1,9 (2)	0,6-0,7 (2)
4	1,0 (3)	0,8 (1)	2,7 (2)	0,9 (1)
5	2,1 (1)	31,0 (1)	3,4 (1)	2,4 (1)

	=0	≥1	≥2	≥3	≥4	≥5
Ø	X					
a		X				
b		X	X			
c		X	X	X		
d		X	X	X	X	
e		X	X	X	X	X

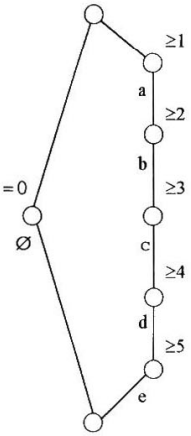


Abb. 3 Kontext und Liniendiagramm einer Biordinalskala

4. Die Klassifikation der Gegenstände

Die formalbegriffsanalytischen Berechnungen mit dem Programm [28] ergaben für den Kontext VITMAT eine Menge von 349 Begriffen und eine DUQUENNE-GUIGUES-Basis von 154 Implikationen. Um die Idee der Klassifikation, die an dem vorliegenden Beispiel erstmals angewendet wurde, zu verdeutlichen, ist die Betrachtung eines Teilkontexts mit dem Ziel der

Verringerung der Begriffsanzahl sinnvoll. Dazu wurde die Merkmalsmenge auf die drei Merkmalsgruppen SiO_2, CuO und FeO eingeschränkt. Das Liniendiagramm des so erzeugten Kontexts SICUFE ist in Abb. 4 dargestellt. Wie bei der vorgenommenen Skalierung zu erwarten war, zeigt es gewissermaßen einen Ausschnitt aus einer dreidimensionalen Gitterskala, in welcher solche Gegenstandsbegriffe in „räumlicher" Nähe liegen, deren Gegenstände ähnliche (ordinale) Größen in den Merkmalen, hier also bezüglich der Gehalte an den drei genannten Oxiden, besitzen.

Tabelle 6 **Der Kontext VITMAT**

Nr.	123456780123456012345012345601234501234501234501234 SSSSSSSSCCCCCCCCCCCCCNNNNNNNKKKKKKMMMMMMAAAAAAFFFFFF iiiiiiiiaaaaaaauuuuuuaaaaaaa gggggglllllleeeeee
01	X.....XXX....XXXXX.XX....X.....XXX...XX....XXXXX
02	X.....XXXXXX.XXXXXX.....X.....XXX...X.....XX...
03	XX.....X.....X.....X.....X.....XXXXX.X....X.....
04	XX.....XXXXX..XXXX..XXX....X.....XXX...X....X.....
05	XXX.....XXX....XXX...XX.....XX....XX....X.....XXXX.
06	XXX.....XXXX...XX....XXXXX..XXX..X.....X....X.....
07	XXX.....XXXX...XX....XXXXX.X.....X.....X....X.....
08	XXX.....XXXXX..XX....XXXXX..XXX..X.....X....X.....
09	XXXX.....XX.....X.....XXXXXX.X.....XX....X.....XXX..
10	XXXXX....XX.....X.....XXXX...XXXXX.XX....XXX...XXX..
11	XXXXXX...X.....X.....XXX....XXX...XXXX..XXXX..X....
12	XXXXXX...X.....X.....XXX....XXXX..XXX...XXX...XX...
13	XXXXXX...X.....X.....XXXX...XXXX..XXX...XXXX.X.....
14	XXXXXX...X.....X.....XXXX...XXXX..XXX...XXXXXX.....
15	XXXXXXX..X.....X.....XXX....XXX...X.....XX...X.....
16	XXXXXXXX.X.....X.....XX.....XX...X.....X.....X.....
17	XXXXXXXX.X.....X.....X.....X.....X.....X....X.....
18	XXXXXXXX.X.....X.....XX.....X.....XXX..X.....X.....
19	XXXXXXXXX.....X.....X.....X.....X.....X.....XX...

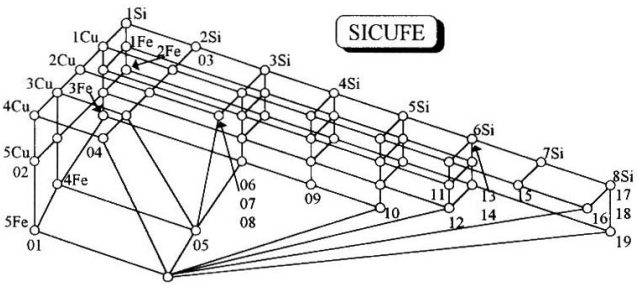


Abb. 4 **Liniendiagramm zum Kontext SICUFE**

Die Verallgemeinerung dieses Gedankens auf eine beliebige Anzahl derartig skalierter Merkmale bzw. eine Gitterskala mit entsprechender Dimension führte dazu, eine Klassifikation der Gegenstände gemäß der Ähnlichkeit ihrer Gegenstandsbegriffe vorzunehmen. Als Maß für die Ähnlichkeit $s(i,j)$ zwischen zwei Gegenständen g_i und g_j bezüglich des skalierten Kontexts wurde das Verhältnis der Anzahl der übereinstimmenden Merkmale in den beiden Gegenstandsbegriffen γg_i und γg_j zur Gesamtzahl der in ihnen überhaupt vorhandenen Merkmale gewählt:

$$s(i,j) = \frac{\mathrm{card}(g_i' \cap g_j')}{\mathrm{card}(g_i' \cup g_j')}.$$

Dieses Maß entspricht dem (metrischen) TANIMOTO-Koeffizienten (vgl. [32] S. 24-27). Die Berechnung der Ähnlichkeitsdreiecksmatrix kann direkt mit dem skalierten Kontext erfolgen.

Um eine Klassenzerlegung nach den berechneten Ähnlichkeiten vornehmen zu können, wurde eine Maßzahl s_0 vorgegeben, bis zu welcher zwei Gegenstände gerade noch als ähnlich angesehen werden sollen. Weiterhin ist es eventuell zweckmäßig das Intervall $[s_0,1)$ zu unterteilen: $[s_0,s_1)$, $[s_1,s_2)$, ... , $[s_{q-1},s_q)$, $[s_q,1)$. Im vorliegenden Fall wurde eine vierfache Unterteilung mit $s_0 = 0{,}60$, $s_1 = 0{,}67$, $s_2 = 0{,}70$ und $s_3 = 0{,}80$ gewählt.

In einem ersten Schritt bei der Klassenzerlegung der Gegenstandsmenge werden diejenigen zusammengefaßt, deren Ähnlichkeit $s(i,j) = 1$ beträgt (Das kann auch dadurch erreicht werden, daß der Kontext bezüglich der Gegenstände bereinigt wird [28].) Die weiteren Darlegungen beziehen sich somit auf eine Gegenstandsmenge $G^* \subseteq G$, welche die Repräsentanten der so gebildeten Klassen als Elemente enthält. Die folgende Zerlegung von G^* in Klassen kann vorteilhafterweise in graphentheoretischer Sprechweise (vgl. [33]) vorgenommen werden:

- Bildung des vollständigen Graphen mit der Knotenmenge G^*, dessen Kanten durch die Ähnlichkeiten $s(i,j) < 1$ bewertet sind.
- Löschen aller Kanten mit $s(i,j) \in [0,s_0)$
- (eventuelle) Änderung der Bewertung gemäß $s(i,j) \in [s_r,s_{r+1}) \Rightarrow s^*(i,j) = s_r$, wobei $r = 0,1,\ldots,q$ und $s_{q+1} = 1$
- Durch Löschen von Kanten zerlege man den so gebildeten Graphen derart in vollständige Teilgraphen, daß die Summe aller Bewertungen der verbleibenden Kanten maximal ist.

Die Gegenstände, die den Knoten eines solchen Teilgraphen entsprechen, bilden die Elemente einer Klasse, wobei aus den auftretenden Bewertungen auf die Stärke der Bindung der einzelnen Elemente untereinander innerhalb der Klasse bzw. auf den Klassenzusammenhalt geschlossen werden kann. Die im letzten Schritt gelöschten Kanten geben überdies Auskunft über die Beziehungen bestimmter Gegenstände zu Klassen, denen sie bei der Zerlegung nicht zugeordnet wurden. Das Auftreten derartiger Kanten deutet an, daß die Einteilung in disjunkte Klassen mit einem gewissen Grad an Willkür verbunden ist.

Für den untersuchten Fall der glasartigen Materialien wurde unter Verwendung des Kontexts VITMAT (Tabelle 6) der durch die ersten drei Schritte gebildete Graph als Relationsschema in Abb. 5 dargestellt. Daraus kann eine Zerlegung in neun disjunkte Klassen gebildet werden, die in Tabelle 7a aufgeschrieben sind.

5. Diskussion und Klasseninhalte

Eine Auswertung des Ergebnisses in archäometrisch-archäologischer Sicht würde den Rahmen dieser Darlegungen überschreiten, sie ist einer gesonderten Publikation [34] vorbehalten. Die Tabelle 7b läßt aber für einen ersten Überblick erkennen, daß die gefundene Klasseneinteilung vor allem in materialmäßiger, in gewissem Umfang auch in zeitlicher und örtlicher Hin-

sicht sinnvoll interpretiert werden kann. Insbesondere ist das oben genannte Ziel, nach welchem das Ergebnis der Klassifikation die eindeutige Zuordnung einer Probe in eine Materialgruppe allein auf Grund ihrer chemischen Zusammensetzung erlauben sollte, sehr gut erreicht worden. Tatsächlich läßt der erste Abschnitt der Tabelle 7b erkennen, daß in jeder der neun Klassen jeweils nur Proben eines der Materialtypen ÄB, Fr, gF, St oder {FC, FG, FE, FD} vorkommen. Die von TITE und BIMSON [29,30] zu dieser Unterscheidung zusätzlich herangezogenen elektronenmikroskopischen Kriterien könnten also entfallen. Selbst nach der Herstellungsart der Fayencen erfolgte eine eindeutige Klassenzuordnung, wobei nur der Typ FE eine Ausnahme macht (s. Klassen Nr. 5 und 6).

	02	04	06	07	08	01	05	09	10	11	12	13	14	15	16	18	17	19	03
02	◆	○																	
04	○	◆																	
06			◆	■	■														
07			■	◆	●														
08			■	●	◆														
01						◆	○												
05						○	◆	○											
09							○	◆	□										
10								□	◆	○	●	○	○						
11									○	◆	■	●	●	○					
12									●	■	◆	●	●	○					
13									○	●	●	◆	■	○					
14									○	●	●	■	◆						
15										○	○	○		◆	□				
16														□	◆	□	○		
18															□	◆			
17															○		◆		
19																		◆	
03																			◆

Abb. 5 Relationsschema für die Klassenzerlegung
◆ **s** = 1, ■ 0,8 ≤ **s** < 1, ● 0,7 ≤ **s** < 0,8, □ 0,67 ≤ **s** < 0,7, ○ 0,6 ≤ **s** < 0,67

Sind andererseits Materialgruppen für zwei Klassen kennzeichnend, wie es für ÄB und FC der Fall ist, so können die sich auf diese Weise in der chemischen Zusammensetzung widerspiegelnden Unterschiede in zeitlicher und lokaler Hinsicht erklärt werden, wie es aus der Tabelle 7b zu ersehen ist. Die beiden Ägyptischblau-Klassen ÄB1 und ÄB2 unterscheiden sich bezüglich der Zeit und des außerägyptischen Fundorts. Allerdings ist die Bindung innerhalb jeder diese beiden Klassen nur schwach, wie der geringe **s**-Wert in Abb. 5 erkennen läßt. Untereinander haben sie keine Beziehung. Hingegen zeigt die Probe 05 aus dem Ägypten der 26.

(Saïten-) Dynastie eine schwache Bindung zu den in etwa dieser Zeit hergestellten glasigen Fritten. Auch die beiden Klassen, welche FC-Proben enthalten, unterscheiden sich zeitlich und bezüglich des Fundortes. Hierbei ist die Beobachtung interessant, daß die aus der Zeit der asiatischen Fremdherrschaft der Hyksos (16./17. Dynastie) stammende, und in der Residenz dieser Könige, dem heutigen Tell el Dab'a, gefundene FC-Probe Nr. 19 eine eigene, von FC2FE2 völlig isolierste Klasse bildet.

Tabelle 7 Ergebnisse der Klassifikation

Ä - Ägypten
Th - Theben
Ka - Karnak
TD- Tell el Dab'a,
Ma - Malta
Ni - Ninive
rö - römisch

7a

Nr.	*Klasse*	*Objekte*
1	ÄB1	02 04
2	ÄB2	01 05
3	Fr	06 07 08
4	gF	09 10
5	FGFE1	11 12 13 14
6	FC2FE2	15 16 18
7	FD	17
8	FC1	19
9	St	03

7b

Nr.	Ä B	Fr	gF	F C	F G	F E	F D	St	16 17	18 20	21	22 24	25	26	rö	Ä	Th	Ka	T D	M a	Ni
1	X									X		X	X				X				X
2	X													X	X	X				X	
3		X								X							X				
4			X										X	X		X					
5					X	X				X								X			
6				X		X				X	X					X		X			
7							X			X									X		
8				X					X										X		
9								X		X						X					

Anm.: Ein „X" in Tabelle 7b bedeutet, daß mindestens eine Probe der jeweiligen Klasse zu der entsprechenden Materialgruppe gehört, in der genannten Zeitspanne hergestellt wurde bzw. an dem erwähnten Ort gefunden wurde.

Wie oben erwähnt, werden in der Archäometrie zur Klassenbildung bevorzugt Verfahren der hierarchischen und in selteneren Fällen der nichthierarchischen Cluster-Analyse eingesetzt. Aus diesem Grunde wurden zum Zwecke des Vergleichs ebenfalls derartige Berechnungen unter Verwendung des Datensatzes in Tabelle 3 durchgeführt, wobei das EUKLIDische Distanzmaß benutzt wurde. Die Ergebnisse für die Zerlegung in vier bis sieben Cluster mit Hilfe der sieben agglomerativen hierarchischen Verfahren des Programms HIERCL von H. SPÄTH [32] (S. 162-175) bzw. mit dem nichthierarchischen Verfahren KMEANS [32] (S. 68-75) zeigen die Tabellen 8 und 9. Es ist leicht zu sehen, daß diese Resultate viel schwieriger zu interpretieren sind als die soeben genannten. So enthalten die Tabellen 8 und 9 unterschiedliche Ergebnisse in Abhängigkeit von der Wahl der Clusteranzahl und Startpartition (KMEANS) bzw. der HIERCL-Variante. Auf diese Weise wird also kein eindeutiges Ergebnis hinsichtlich der Klassenzerlegung erhalten. Die auftretenden Schwierigkeiten bei der Auswertung müßten durch die Anwendung weiterer Algorithmen (s. z.B. [35-38]) vermindert werden, d.h., die Will-

kür bei der Aussonderung der für die Interpretation „geeignesten" Klassenzerlegung durch mathematische Methoden eingeschränkt werden. Diese Vorgehensweise entfällt bei dem hier vorgestellten Verfahren.

Tabelle 8 Agglomerative hierarchische Cluster-Analyse mit HIERCL
(vor dem Materialtyp die Anzahl)
HIERCL-Varianten: 1 single linkage, 2 complete linkage, 3 average linkage, 4 median, 5 average linkage (weighted), 6 centroid, 7 WARD's method
* Malta & Ninive, + Theben & Ägypten, # Karnak, ° Karnak & Ägypten

Methode	*Cluster 1*	*Cluster 2*	*Cluster 3*	*Cluster 4*	*Cluster 5*	*Cluster 6*	*Cluster 7*
HIERCL 1-6	St	ÄB (Ä,26) 3 Fr 2 gF	ÄB (Th,NK) 2 ÄB*	2 FC 4 FE 2 FG FD			
HIERCL 7	St	2 ÄB+ 3 Fr 2 gF	2 ÄB*	2 FC 4 FE 2 FG FD			
HIERCL 1,3,4,5	St	ÄB (Ä,26) 3 Fr	2ÄB*	ÄB (Th,NK)	2 gF	2 FC 4 FE 2 FG FD	
HIERCL 2	St	ÄB (Ä,26) 3 Fr	ÄB (Th,NK) 2 ÄB*	2 FG 2 FE#	2 gF	2 FC 2 FE° FD	
HIERCL 6	St	ÄB (Ä,26)	2 ÄB*	ÄB (Th,NK)	3 Fr 2 gF	2 FC 4 FE 2 FG FD	
HIERCL 7	St	2 ÄB+ 3 Fr	2 ÄB*	2 FG 2 FE#	2 gF	2 FC 2 FE° FD	
HIERCL 1	St	ÄB (Ä,26) 3 Fr	2 ÄB*	ÄB (Th,NK)	gF	gF	2 FC 4 FE 2 FG FD
HIERCL 2,3	St	ÄB (Ä,26) 3 Fr	2 ÄB*	ÄB (Th,NK)	2 gF	2 FG 2 FE#	2 FC 2 FE° FD
HIERCL 4,6	St	ÄB (Ä,26)	2 ÄB*	ÄB (Th,NK)	2 gF	3 Fr	2 FC 4 FE 2 FG FD
HIERCL 5	St	ÄB (Ä,26) 3 Fr	2 ÄB*	ÄB (Th,NK)	2 gF	2 FG 2 FE#	2 FC 2 FE° FD
HIERCL 7	St	2 ÄB+	2 ÄB*	3 Fr	2 gF	2 FG 2 FE#	2 FC 2 FE° FD

Tabelle 9 Nichthierarchische Cluster-Analyse mit KMEANS
(vor dem Materialtyp die Anzahl der Gegenstände, Opt.-Par.: Optimierungsparameter)

Opt.-Par.	Cluster 1	Cluster 2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5	Cluster 6	Cluster 7
383,4	St	ÄB (Ä.26) 3 Fr 2 gF	ÄB (Th.NK) 2 ÄB*	2 FC 4 FE 2 FG FD			* Malta & Ninive
280,5	St	ÄB (Ä.26) 3 Fr	ÄB (Th.NK) 2 ÄB*	2 gF	2 FC 4 FE 2 FG FD		+ Theben & Ägypten
250,4	St	ÄB (Ä.26) 3 Fr 2 gF	ÄB (Th.NK) 2 ÄB*	2 FG 3 FE#	2FC FE (Ä.18) FD		# Karnak
187,4	St	2 ÄB+	2 ÄB*	3 Fr 2 gF	2 FG 3 FE#	2FC FE (Ä.18) FD	
147,5	St	ÄB (Ä.26) 3 Fr	ÄB (Th.NK) 2 ÄB*	2 gF	2 FG 3 FE#	2FC FE (Ä.18) FD	
97,1	St	2 ÄB+	2 ÄB*	2 gF	3 Fr	2 FG 3 FE#	2FC FE (Ä.18) FD

Außerdem gehören die Proben eines Clusters in mehreren Fällen verschiedenen Materialtypen an, so daß eine Interpretation in archäometrisch-archäologischer Hinsicht, wie sie gerade unter Verwendung der in den Tabellen 7a und 7b dargestellten Resultate gar nicht möglich wären. Das mit der Klassenbildung angestrebte Ziel der Zerlegung in Matrialklassen wäre nicht erreicht worden.

Es muß aber noch auf einen hervorragenden Vorteil bei der Anwendung der FBA hingewiesen werden, nämlich die bei der Anwendung der Cluster-Analyse-Methoden nicht vorhandene Möglichkeit, Aussagen über die inhaltliche Seite der gefundenen Klassifikation zu erhalten, d.h., eine Erklärung für das Gemeinsame der Gegenstände in einer Klasse. Dazu ist der mehrwertige Ausgangskontext durch das Merkmal der Klassenzugehörigkeit zu ergänzen. Bei der Bildung des einwertigen Kontexts ist es natürlicherweise nominal zu skalieren. Allein ein Sortieren dieses erweiterten Kontexts nach den Klassenmerkmalen läßt bereits verbindende (und auch trennende) Merkmale innerhalb der einzelnen Klassen erkennen. Andererseits können mit Hilfe der mit diesem Kontext ermittelten Merkmalsimplikationen Aussagen über das Gemeinsame und den Inhalt der Klassen gewonnen werden. Das aber ist letztlich das Ziel jeder Klassifikation. Wenn man bedenkt, daß mit der Cluster-Analyse und ähnlichen Verfahren gewöhnlich nur eine Zerlegung der Gegenstandsmenge in Klassen erreicht wird, so muß diesem Vorteil der FBA höchste Wertschätzung zukommen.

Um das Gesagte am Kontext VITMAT zu demonstrieren, wurde eine biordinale Skalierung des SiO_2-Gehaltes vorgenommen, um auf diese Weise zwei Klassen zu erhalten, die mit „wenig" (w) und „viel" (v) bezeichnet werden konnten. Sie enthielten jeweils eine ordinale Abfolge mit vier Gliedern. Daraus ergibt sich eine Umbenennung der Merkmale jSi → wjSi ($j \leq 4$)

und jSi → v(j-4)Si (j > 4). Der um die Klassenzugehörigkeit erweiterte und bereits sortierte Kontext VITMATCL ist in Tabelle 10 gegeben.

Tabelle 10 Der nach den Klassenmerkmalen sortierte Kontext VITMATCL (bezüglich der Klassennumerierung s. Tabelle 7)

Nr.	wwwwvvvv 12341234012345601234501234560123450123450123450123 45 SSSSSSSSCCCCCCCCCCCCCNNNNNNNKKKKKKMMMMMMMAAAAAAAFFFFFF iiiiiiiiaaaaaaauuuuuuaaaaaaa gggggg111111eeeeee	*Klassen* CCCCCCCCC 111111111 123456789
03	XX.....X.....X.....X.....X.....XXXXX.X....X.....	X
02	X.....XXXXXX.XXXXXX.....X.....XXX...X.....XX...	X.....
04	XX.....XXXXX..XXXX..XXX....X.....XXX...X....X.....	X.....
06	XXX.....XXXX...XX....XXXXX..XXX..X.....X....X.....	.X.....
07	XXX.....XXXX...XX....XXXXX.X.....X.....X....X.....	.X.....
08	XXX.....XXXXX..XX....XXXXX..XXX..X.....X....X.....	.X.....
01	X.....XXX....XXXXX.XX....X.....XXX...XX....XXXXX	..X.....
05	XXX.....XXX....XXX...XX.....XX...XX....X.....XXXX.	..X.....
09	XXXX.....XX.....X.....XXXXXX.X.....XX....X.....XXX..	...X.....
10	....X....XX.....X.....XXXX...XXXXX.XX....XXX...XXX..	...X.....
11	....XX...X.....X.....XXX....XXX...XXXX..XXXX..X....	....X....
12	....XX...X.....X.....XXX....XXXX..XXX...XXX...XX...	....X....
13	....XX...X.....X.....XXXX...XXXX..XXX...XXXX.X.....	....X....
14	....XX...X.....X.....XXXX...XXXX..XXX...XXXXXX.....	....X....
15	....XXX..X.....X.....XXX....XXX...X.....XX...X.....	.....X...
16	....XXXX.X.....X.....XX.....XX...X.....X.....X.....	.....X...
18	....XXXX.X.....X.....XX.....X.....XXX..X.....X.....	.....X...
17	....XXXX.X.....X.....X.....X.....X.....X....X.....	.....X..
19	....XXXXX.....X.....X.....X.....X.....X.....XX...	.....X.

Einen Ausschnitt der mit dem Kontext VITMATCL ermittelten DUQUENNE-GUIGUES-Basis zeigt Tabelle 11. Aus ihnen ist neben vielem anderen zu ersehen, daß die Gegenstände der Klasse ÄB1 einen relativ hohen CaO- und CuO- sowie einen mittleren MgO-Gehalt gemeinsam haben, während sie sich bezüglich Na_2O und FeO gravierend unterscheiden. (Das ergibt sich aus der ersten Zeile der Tabelle 11, die man etwa so lesen kann: Immer wenn eine Probe (Gegenstand des Kontexts VITMATCL) zur Klasse ÄB1 gehört [Prämisse P], so hat sie auch zumindest ein Minimum an SiO_2, mindestens einen CaO-Gehalt aus dem Intervall 5 (s. Tabelle 5), mindestens einen CuO-Gehalt aus dem Intervall 4, enthält wenigstens etwas an K_2O, hat mindestens einen MgO-Gehalt aus dem Intervall 3 und zumindest etwas Al_2O_3 [Conclusionen C], während es bezüglich der Konzentrationen an Na_2O und FeO offensichtlich keine verbindende Aussage gibt: ÄB1 ⇒ w1Si 1...5Ca 1...4Cu 1K 1...3Mg 1Al.) Bei der anderen Ägyptischblau-Klasse ÄB2 liegt der gemeinsame Gehalt an CaO, CuO und MgO etwas tiefer als in ÄB1, dafür stimmen sie aber in einem recht hohen FeO- und einem kleinen Na_2O-Gehalt ebenfalls überein. Ein trennendes Merkmal ist der Anteil an K_2O. Der Unterschied zwischen diesen beiden Klassen liegt somit in den CaO-, CuO-, MgO- und vor allen FeO-Konzentrationen begründet. Im Rahmen dieser Arbeit mögen diese Ausführungen genügen, zumal ein gesonderter Aufsatz den Merkmalsimplikationen der FBA und ihrer Anwendung gewidmet sein wird [40].

Tabelle 11 DUQUENNE-GUIGUES-Implikationsbasis zum Kontext VITMATCL (Ausschnitt)

```
wwwwvvvv
12341234012345601234501234560123450123450123450123 45 Ä Ä
SSSSSSSSCCCCCCCCCCCCCNNNNNNNNKKKKKKMMMMMMAAAAAAFFFFFF BFBg
iiiiiiiiaaaaaaauuuuuuaaaaaa      gggggglllllleeeeee 1r2F
-----------------------------------------------------------
C........CCCCC..CCCC.........C.....CCC...C.......... P...
P........PPPCC..PPPP.........P.....PPP...P.......... C...
P........PPPPC..PPPC.........C.....PPC...P.......... C...
C........CCCCCP.CCCCCC.......C.....CCC...C.....CC... C...
C........PCCCCC.PCCCCP.......C.....PPC...P.....PP... C...
P........PPPPPC.PPPPPC.......P.....PPP...P.....PP... P...
CC.......PCCCC..PCCC..PPP....P.....PPP...P....P..... C...
CCC......CCCC...CC....CCCCC.......C......C....C..... .P..
CCC......PCCC...PC....PPPCC.......P......P....P..... .C..
PPC......PCCC...CC....PCCCC.......P......P....P..... .C..
PPP......PPPP...PP....PPPPP.......C......P....P..... .C..
PPC......PPPP...PP....PPPCC.P.....C......P....P..... .C..
C........CCC....CCC...CC..........CC....C.....CCCC. ..P.
C........CCC....CCC...CC..........CC....C.....CCCP. ..C.
P........PPP....PPP...PP..........PP....P.....PPPC. ..C.
C........CCC....CCCCC.CC....C.....CCC...CC....CCCCP ..C.
P........PPC....PCCCC.PP....C.....PPC...PP....PPPCC ..C.
P........PPP....PPPPC.PP....P.....PPP...PC....CCCCC ..C.
.........CC.....C.....CCCC...C.....CC....C.....CCC.. ...P
.........PP.....P.....PPPC...P.....PP....P.....PPP.. ...C
.........PP.....P.....PPPP...P.....PP....P.....CCC.. ...C
....C....CC.....C.....CCCC...CCCCP.CC....CCC...CCC.. ...C
....P....PP.....P.....PPPP...PPPPC.PP....PPP...PPP.. ...P
CCCC.....CC.....C.....CCCCCP.C.....CC....C.....CCC.. ...C
CCCP.....CC.....C.....CCCCCC.C.....CC....C.....CCC.. ...C
PPPC.....PP.....P.....PPPPPC.P.....PP....P.....PPP.. ...P
```

Es ist aber zu betonen, daß sich solche und ähnliche Aussagen immer auf den gegebenen Kontext bzw. die Datenmatrix beziehen, d.h., wie bei jeder explorativen Datenanalyse muß beachtet werden, daß die erzielten Resultate für eine Hypothesenbildung oder -stützung wertvoll sind, jedoch niemals mit ihnen ein Beweis geführt werden kann. So können die Betrachtungen über die Ägyptischblau-Klassen Hinweise auf die Technologie oder zu Fragen des Austausches von Waren bzw. technologischem Wissen geben, zu ihrer Fundierung müssen aber sowohl weitere Proben als auch andersartige Daten und Aussagen betrachtet werden. Daß aber gerade die FBA für die Aufgabe der Hypothesenbildung und -stützung ein besonders gut geeignetes Werkzeug ist, hofft diese Arbeit aufgezeigt zu haben. Hierbei ist zu beachten, daß die Möglichkeiten der FBA noch weitaus umfangreicher sind, als sie geschildert wurden. So sind die Darlegungen dieses Aufsatzes in vielerlei Hinsicht auch für die theoretische Analytische Chemie nur als ein erster Hinweis auf dieses Gebiet der Ordnungs- bzw. Verbandstheorie anzusehen.

6. Anhang: Über begriffliches Skalieren und begriffliche Skalen

Wenn man von Skalieren spricht, so meint man damit die Herausbildung formaler Muster, um damit gegebene Daten zu analysieren. Es sei nun $w(m)$ eine Menge von Werten oder

besser Ausprägungen eines Merksmals m und G eine Gegenstandsmenge. Jeder Wert von w(m) ist mindestens einem Gegenstand aus G zugeordnet, umgekehrt braucht aber nicht jedem Gegenstand ein Wert zugeordnet zu sein. Auf diese Weise ist eine Spalte einer Datematrix, die auch Leerstellen (missing values) enthalten darf, beschrieben. Die so gegebene Daten- oder Wertemenge w(m) begrifflich zu skalieren, bedeutet die Schaffung eines formalen Musters in Form eines (einwertigen) Kontexts bzw. des ihm zugehörigen Begriffsverbandes. Dabei soll die Struktur des Begriffsverbandes die Bedeutung widerspiegeln, die für die Daten w(m) geben ist oder welche ihr durch die Interpretation unterlegt werden. Der bei der Skalierung aufgestellte Kontext $\Sigma(m) = (G_{\Sigma(m)}, M_{\Sigma(m)}, I_{\Sigma(m)})$ heißt die begriffliche Skala von m, wobei für die Skalenwerte $G_{\Sigma(m)} = w(m)$ gilt. Die Wahl der Skalenattribute $M_{\Sigma(m)}$ und der binären Relation $I_{\Sigma(m)}$ hängt von der erwähnten Bedeutung ab.

Haben die Ausprägungen etwa klassifikatorischen Charakter, hat zwischen ihnen also nur die Gleichheitsrelation Gültigkeit, wie das gewöhnlich für Farben zutrifft, so wird man für die Skalierung eines solchen Merkmals eine Nominalskala verwenden, die mit der Bedeutung des Partitionierens verbunden ist. Allgemein läßt sich eine solche Skala als $\mathcal{N} = (\mathbf{N},\mathbf{N},=)$ schreiben, wobei $\mathbf{N} = \{1, 2, ..., n\}$ die Menge der ersten n natürlichen Zahlen ist. Wenn w(m) = n ist, kann man sich die Skalenwerte N als die Numerierung der Ausprägungen von m denken und die Skalenattribute N als Bezeichnungen der Klassen. Für n = 3 ist der Kontext und das Liniendiagramm der Nominalskala in Abb. 6 dargestellt, Beispiele für n = 2 (ohne Abbildungen auf die natürlichen Zahlenmengen) sind die Tabellen 1c und 1d.

		1 *Grün*	*2* *Weiß*	*3* *Rot*
grün	1	X		
weiß	2		X	
rot	3			X

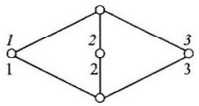


Abb. 6 Die Nominalskala ({1,2,3}, {*1,2,3*}, =)
bzw. ({grün, weiß, rot}, {*Grün, Weiß, Rot*}, =) und ihr Liniendiagramm

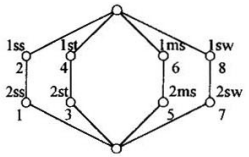
Sind die Ausprägungen von w(m) Zahlen, z.B. Meßwerte, Häufigkeiten, Anzahlen u.ä., so kann es sinnvoll sein, ihnen die Bedeutung der steigenden bzw. fallenden Ordnung, eine Ordination, Anordnung, zu geben. Die hierbei zu benutzende Skala ist in allgemein als $(\mathbf{N},\mathbf{N},\leq)$ bzw. $(\mathbf{N},\mathbf{N},\geq)$ anzugeben, wobei N dieselbe Bedeutung wie bei der Nominalskala besitzt. Das Liniendiagramm dieser (eindimensionalen) Ordinalskala ist eine Kette, wie bereits im Zusammenhang mit Abb. 3 erläutert wurde. Will man die Skala direkt in der angegebenen Form benutzen, so muß man sich die Werte des betrachteten Merkmals auf die Menge der n ersten natürtlichen Zahlen abgebildet denken. Die Skalenattribute stellen dann die steigende oder fallende Folge der Merkmalsausprägungen dar.

Möchte man die Werte von w(m) nicht nur anordnen, sondern auch zugleich Klassen zuordnen, so muß man eine Multiordinalskala (für zwei Klassen eine Biordinalskala) verwenden. Mathematisch kann eine solche Skala als disjunkte Vereinigung von Ordinalskalen aufgeschrieben werden. Bezüglich der Einzelheiten sei auf [26] und [17] (S. 30) hingewiesen. Statt der strengen mathematischen Formulierung sei ein ein zu Abb. 3 zusätzliches Beispiel angeführt. In der Abb. 7 werden einige Säuren und ihre Säurekonstante K_S aufgeführt (s. Abb. 7, entnommen aus [41]). Diese Merkmal gestattet eine Zerlegung der Säuren in die Klassen „sehr stark" (ss), „stark" (st), „mittelstark" (ms) und „schwach" (sw), die jeweils entsprechend der

Merkmalswerte K_S ordinal verfeinert werden können. In Abb. 7 werden die entsprechende Multiordinalskala und das Liniendiagramm des zugehörigen Begriffsverbandes gegeben.

Säure	*Formel*	K_S [mol·l^{-1}]
Chlorwasserstoffsäure	HCl	$1{,}0\cdot10^{7}$
Salpetersäure	HNO_3	21
Fluorwasserstoffsäure	HF	$6{,}2\cdot10^{-4}$
Orthophosphorsäure	H_3PO_4	$7{,}5\cdot10^{-3}$
Essigsäure	CH_3COOH	$1{,}8\cdot10^{-5}$
Kohlensäure	H_2CO_3	$4{,}3\cdot10^{-7}$
Ammonium-Ion	NH_4^+	$5{,}6\cdot10^{-10}$
Wasser	H_2O	$1{,}0\cdot10^{-14}$

		1ss	*2ss*	*1st*	*2st*	*1ms*	*2ms*	*1sw*	*2sw*
$1{,}0\cdot10^{7}$	*1*	X	X						
21	*2*	X							
$6{,}2\cdot10^{-4}$	*4*			X					
$7{,}5\cdot10^{-3}$	*3*			X	X				
$1{,}8\cdot10^{-5}$	*5*					X	X		
$4{,}3\cdot10^{-7}$	*6*					X			
$5{,}6\cdot10^{-10}$	*7*							X	
$1{,}0\cdot10^{-14}$	*8*							X	X



$\mathcal{O}_m$	∅	∅	∅
∅	$\mathcal{O}_n$	∅	∅
∅	∅	$\mathcal{O}_p$	∅
∅	∅	∅	$\mathcal{O}_q$

Abb. 7 Das multiordinale Merkmal „Säurestärke" K_S, die zugehörige Skala und das Liniendiagramm des Begriffsverbandes sowie das Schema der Tetraordinalskala $\mathcal{M}_{m,n,p,q} = \mathcal{O}_{m+n+p+q}$

Im Text wurde im Zusammenhang mit dem Kontxt ELEMENT von mehrdimensionalen dichtomen Skalen gesprochen. Eine dichtome Skala $\mathcal{D}$ ist ein Kontext ({nein, ja},{nein, ja},$=_E$) ($=_E$ bezeichnet die Gleichheit von Elementen) bzw. ({0,1},{0,1},=) (s. Abb. 8). Ihr Verband ist isomorph zu dem der Nominalskala $\mathcal{N}_2$ und zu $\mathcal{M}_{1,1}$. Eine p-dimensionale dichtome Skala $\mathcal{D}_p$ wird als p-faches Halbprodukt von $\mathcal{D}$ gebildet (Einzelheiten s. [26] und [17] (S. 31)). Für eine zweidimensionale dichotome Skala, wie sie der Kontext ELEMENT darstellt (Abb. 2) kann

man folglich schreiben: $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \bar{\times} \mathcal{D} = (\{0,1\}\times\{0,1\},\ \{1\}\times\{0,1\} \cup \{2\}\times\{0,1\},\ \nabla)$ mit $(g_i,g_j)\nabla(\mu,\nu) :\Leftrightarrow g_\nu I_\nu \mu$.

		ja *1*	*nein* *0*
ja	1	X	
nein	0		X

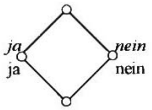


Abb. 8 Die dichotome Skala und ihr Liniendiagramm

Mit dem Kontext SICUFE war ein Ausschnitt aus einer Gitterskala, deren Bedeutung eine Mehrfachreihung ist, gegeben. Eine p-dimensionale Gitterskala $\mathcal{G}_{m,n,\ldots}$ wird als p-faches Halbprodukt von Ordnialskalen $\mathcal{O}_m \bar{\times} \mathcal{O}_n \bar{\times} \cdots$ (s.o.) gebildet.

Die Skalierung eines mehrwertigen Kontexts (G,M,W,R) bedeutet nun, daß allen Merkmalen $m \in M$ eine begriffliche Skala zugeordnet wird, wie das für einige Fälle soeben beschrieben wurde. Technisch ist das so durchzuführen, daß die Merkmale des mehrwertigen Kontexts durch die Skalenattribute ersetzt werden und für jede Merkmalsausprägung in der entsprechenden Spalte des mehrwertigen Kontexts die zugehörige Zeile im Skalenkontext eingefügt wird. Schematisch zeigt diesen Vorgang Abb. 9.

		m_j	
g_i		2	

→

m_j	1j	2j	3j
1	X		
2	X	X	
3	X	X	X

→

		1j	2j	3j	
g_i		X	X		

Abb. 9 Schematische Darstellung des (ordinalen) Skalierens eines Merkmals in einem mehrwertigen Kontext

7. Literatur

[1] K. VARMUZA, *Chemometrie,* in: E. ZIEGLER (Hrg.), *Computer in der Chemie*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984, S. 131-153

[2] K. DOERFFEL, K. DANZER und G. EHRLICH, Mittbl. Chem. Ges. DDR **31**, 3 (1984)

[3] H.-G. BARTEL, *Einige Gedanken zum Inhalt und zu den Aufgaben der Chemischen Informatik,* in: *Probleme und Entwicklungsrichtungen der Wissenschaftsinformation,* 5. Wissenschaftliches Symposium der Akademie der Wissenschaften der DDR, Wissenschaftliches Informationszentrum, Göhren-Lebbin, 1987, S. 260-271

[4] R. GELIUS, *Archäometrie,* in: S. ENGELS und R. STOLZ (Hrg.), *ABC der Geschichte der Chemie,* Verl. für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1989, S. 67-68

[5] International Symposium on Archaeometry, 9-14 May 1994, Ankara, Turkey, Second Circular

[6] R.C.A. ROTTLÄNDER, *Einführung in die naturwissenschaftlichen Methoden in der Archäologie,* Archaeologica Venetoria, Tübingen 1983

[7] O.E. POLANSKY, match **1**, V (1975)

[8] E. BLASIUS, H. WAGNER, H. BRAUN, R. KRUMHOLZ und B. THIMMEL, Fresenius Z. Anal. Chem. **310**, 98 (1982)

[9] G. SCHNEIDER, H. KNOLL, C.J. GALLIS and J.-P. DEMOULE, *Pruduction and Distribution of Coarse and Fine Pottery in Neolithic Thessaly, Greece,* in: E. PERNICKA and G.A. WAGNER (ed.), Archaeometry '90, Proceedings of the 27th Sysmposium on Archaeometry, Heidelberg, 1990, S. 513-522

[10] H.-G. BARTEL, *Formal Concept Analysis Studies: Roman Bricks and Wall Slabs,* in: Proceedings of the 29th International Symposium on Archaeometry, Ankara, 1994, im Druck

[11] P. IHM, *Statistik in der Archäologie* (Archäo-Physica, Bd. 9), Köln, Bonn, 1978

[12] R.L. BISHOP, G. HARBOTTLE and E.V. SAYRE, Memoirs of the Peabody Museum of Archaeology and Ethnology **15**, 272 (1982)

[13] R.L. BISHOP and H. NEFF, Adv. Chem. **220**, 57 (1986)

[14] H. MOMMSEN, A. KREUZER and J. WEBER, Archaeometry **30**, 47 (1988)

[15] K. DANZER, K. FLORIAN, R. SINGER, F. MAEURER and ABU BAKR M. EL-NADY, Anal. Chim. Acta **201**, 289 (1987)

[16] R. WILLE, *Bedeutungen von Begriffsverbänden,* in: B. GANTER, R. WILLE und K.E. WOLFF (Hrg.), *Beiträge zur Begriffsanalyse,* BI-Wissenschaftsverl., Mannheim, 1987, S. 161-211

[17] R. WILLE und B. GANTER, *Formale Begriffsanalyse, Dritter Teil: Mathematische Theorie der Formalen Begriffsanalyse,* BI-Wissenschaftsverl., Mannheim, in Vorbereitung

[18] H.-G. BARTEL, match **30**, 9 (1994)

[19] H.-G. BARTEL, spectrum **21**, 29 (1990)

[20] H.-G. BARTEL und J. HALLOF, Hildesheimer Ägyptologische Beiträge **37**, 115 (1994)

J. HALLOF und H.-G. BARTEL, *Gau- und Götterprozessionen in Texten der griechisch-römi-schen Zeit als Begriffsverbände,* in: *Hommages à Jean Leclant,* Volume 4, Institut Français d'Archéologie Ortientale, Bibliothèque d'étude **106/4**, Le Caire, 1994, S. 109-123

[21] H.-G. BARTEL, *Formalbegriffliche Datenanalyse,* Informatique et Égyptologie **9**, 1 (1994)

[22] F. JÜRß und D. EHLERS, *Aristoteles* (Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 60), Teubner, Leipzig, 1982, S. 72

[23] H. SEIDEL, *Aristoteles und der Ausgang der antiken Philosophie,* Dietz, Berlin, 1984, S. 58

[24] V. DUQUENNE et J.-L. GUIGUES, Math. Sci. Hum. **95**, 5 (1986)

[25] B. GANTER und R. WILLE, Sudien zur Klassifikation **17**, 171 (1986)

[26] B. GANTER and R. WILLE, *Conceptual Scaling,* in: F. ROBERTS (ed.), *Application of Combinatorics and Graph Theory to the Biological and Social Sciences,* Springer, New York, 1989, S. 139-167

[27] B. GANTER, *Algorithmen zur Formalen Begriffsanalyse,* in: B. GANTER, R. WILLE und K.E. WOLFF (Hrg.), *Beiträge zur Begriffsanalyse,* BI-Wissenschaftsverl., Mannheim, 1987, S. 241-254

[28] P. BURMEISTER, *ConImp* (Contexts, Concepts and Implications) former program BAV3E, version 3.06B, TH Darmstadt, 1991

[29] M.S. TITE, Archaeometry **29**, 21 (1987)

[30] M.S. TITE and M. BIMSON, *Identification of Early Vitreous Materials,* in: J. BLACK (ed.), *Recent Advances in the Conservation and Analysis of Artifacts,* London, 1987, S. 81-85

[31] E. HORNUNG, *Grundzüge der Ägyptischen Geschichte,* Wissenschaftl. Buchges., Darmstadt, 1978, S. 162-165

[32] H. SPÄTH, *Cluster-Analyse-Algorithmen zur Objektklassifizierung und Datenreduktion,* Oldenbourg, München, Wien, 1975

[33] H. SACHS, *Einführung in die Theorie der endlichen Graphen, Teil I,* BSB. B.G. Teubner Verlagsges., Leipzig, 1970

[34] H.-G. BARTEL, Ägypten und die Levante, in Vorbereitung

[35] H.-G. BARTEL, Syst. Anal. Model. Simul. **7**, 557 (1990)

[36] H.-G. BARTEL, Syst. Anal. Model. Simul. **8**, 139 (1991)

[37] H.-G. BARTEL, *Seriationsmethoden in der Chemometrie und Archäometrie* , in: COMPANA '88, 4. Tagung „Computereinsatz in der Analytik", Wiss. Beiträge der Friedrich-Schiller-Universität Jena, 1989, S. 95-106

[38] H.-G. BARTEL, Monatsh. Chem. **121**, 237 (1990)

[39] K.E. WOLFF, *Interpretation von Mustern in Kontexten und Begriffsverbänden*, Publication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, 1992

[40] H.-G. BARTEL, match, in Vorbereitung

[41] G. RÖBISCH, in: *Chemie, Lehrbuch für Klasse 12*, Volk und Wissen Volkseigener Verl., Berlin, 1982, S. 71

Diese Arbeit wurde im Rahmen eines von der
Deutschen Forschungsgemeinschaft
geförderten Projekts durchgeführt.