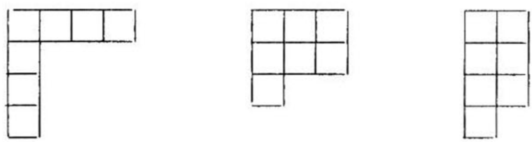
match no. 7 pp. 317 - 325 1979

EINE BEMERKUNG ZUR RUCH-SCHÖNHOFER'SCHEN HALBORDNUNG VON YOUNG-DIAGRAMMEN

ANDREAS DRESS

Prof. Dr. A. Dress, Universtät Bielefeld, Fakultät für Mathematik

In ihrer grundlegenden Arbeit "Theorie der Chiralitätsfunktionen" (Theor. Chim. Acta, Vol. 19, 1970) betrachten E. Ruch und A. Schönhofer die Möglichkeiten, die Zahlen $1,2,\ldots,n$ so in zwei jeweils aus n Kästchen bestehende Young-Diagramme Γ und Δ einzufüllen, daß keine zwei Elemente aus einer Zeile von Γ sich gemeinsam in einer Spalte von Δ befinden. Dabei ist ein aus n Kästchen bestehendes Young-Diagramm Γ wie üblich zu einer Partition von n: $n=s_1+\ldots+s_z$, $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \ldots \geq s_z$, $s_\zeta \in \mathbb{N}$, definiert als eine Konfiguration von insgesamt n gleich großen, quadratischen Kästchen, von denen z_1 nebeneinander in der ersten Zeile, z_2 nebeneinander in der zweiten Zeile, z_3 nebeneinander in der dritten Zeile und so weiter so übereinander angeordnet sind, daß die jeweils ersten Kästchen übereinander stehen, also eine Spalte von insgesamt $z = z_1$ Kästchen bilden. (s. Abb. 1). Wir bezeichnen also die Anzahl der ζ-ten Zeile eines Young-Diagramms Γ stehenden Kästchen mit $s_\zeta = s_\zeta(\Gamma)$ und entsprechend die Anzahl der in der σ-ten Spalte stehenden Kästchen mit $z_\sigma = z_\sigma(\Gamma)$.



7=4+1+1+1 7=3+3+1 7=2+2+2+1

Abb. 1 : Young-Diagramme zur Zahl 7

Offenbar sind s_ζ und s_σ monoton fallende Funktionen von ζ, bzw. σ und es gilt

(1) $$s_\zeta \geq \sigma \Leftrightarrow z_\sigma \geq \zeta ,$$

da beides damit gleichwertig ist, daß in der ζ-ten Zeile und σ-ten Spalte von Γ ein Kästchen zu finden ist.

Aus (1) folgen offenbar sofort die bekannten Regeln

(2) $$s_\zeta = \mathrm{Max}\ \{\sigma \mid z_\sigma \geq \zeta\}$$

und

(3) $$z_\sigma = \mathrm{Max}\ \{\zeta \mid s_\zeta \geq \sigma\} .$$

Eine Einfüllung F der Zahlen $1,\ldots,n$ in ein Young-Diagramm zur Zahl n ist nun nichts anderes als eine beliebige Verteilung dieser n Zahlen auf die n Kästchen derart, daß in jedes Kästchen genau eine der Zahlen aus $\{1,\ldots,n\}$ eingetragen wird (vgl. Abb.2).

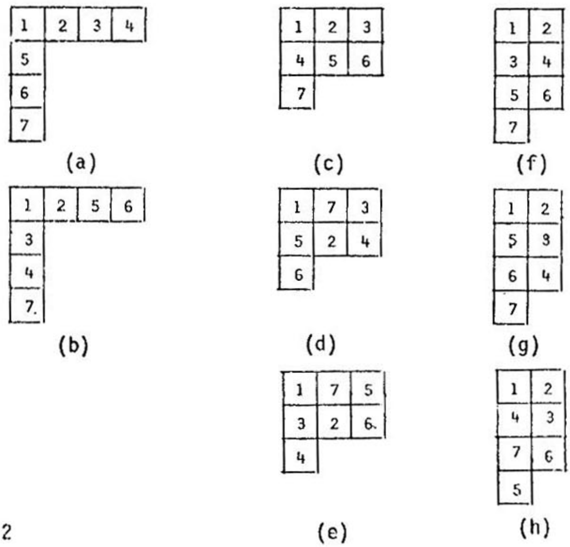


Abb. 2

Eine Einfüllung F kann formal als ein Paar (F_z,F_s) von Abbildungen

$$F_z,F_s : \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\}$$

beschrieben werden, derart daß $j \in \{1,\ldots,n\}$ genau in die $F_z(j)$-te Zeile und dort in die $F_s(j)$-te Spalte eingetragen wird. Die Abbildungen F_z und F_s müssen daher folgenden Einschränkungen unterliegen

(4) $$F_z \times F_s : \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}$$

ist injektiv, d.h.

$$F_z(j) = F_z(i) \text{ und } F_s(j) = F_s(i) \Longleftrightarrow j = i$$

(5) Gilt $$F(j) = (F_z(j), F_s(j)) = (\zeta,\sigma),$$

so ist $s_\zeta \geq \sigma$ und ebenso $z_\sigma \geq \zeta$.

Mit anderen Worten: Für eine feste Spalte σ bildet F_z die Menge der j mit $F_s(j) = \sigma$ bijektiv auf die Zahlen $\{1,\ldots,z_\sigma\}$ ab und ebenso wird für eine feste Zeile ζ die Menge der j mit $F_z(j) = \zeta$ bijektiv auf die Menge $\{1,\ldots,s_\zeta\}$ abgebildet. Jedes Kästchen aus Γ wird damit genau einmal getroffen.

Ein entscheidendes mathematisches Hilfsmittel der Ruch-Schönhoferschen Theorie der Chiralitätsfunktionen ist nun der folgende, auch sonst wichtige und interessante Satz:

Sind Γ und Δ zwei Young-Diagramme zur Zahl n, so gibt es genau dann Einfüllungen $F = (F_z,F_s)$ von Γ und $G = (G_z,G_s)$ von Δ derart, daß keine zwei bezgl. F in einer Zeile stehenden Zahlen durch G in eine Spalte abgebildet werden, d.h. daß

$$F_z \times G_s : \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}$$

injektiv ist, wenn für alle $i=1,\ldots,n$ gilt:

$$(6) \qquad \sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Gamma) \leq \sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Delta)$$

In diesem Falle heißt Δ auch "größer" als Γ, in Zeichen: $\Gamma \subseteq \Delta$.

Ziel dieser Note ist es ausschließlich, einen ausführlichen, konstruktiven Beweis dieses bei Ruch und Schönhofer nur skizzenhaft bewiesenen Satzes zu geben. Für die chemisch und auch anderweitig relevanten Interpretationen des Satzes verweise ich auf die einschlägigen Arbeiten von Ruch und seiner Schule.

Natürlich läßt sich der Satz auch durch eine mehr oder minder triviale Kette von Umformungen auf andere bekannte Sätze der elementaren Kombinatorik zurückführen. Doch gewinnt man dabei in der Regel kein übersichtliches Konstruktionsverfahren für die Einfüllungen F und G. Umgekehrt ergeben die gleichen Umformungen - in umgekehrter Reihenfolge - auch interessante konstruktive Beweise der mit dem obigen Satz äquivalenten Aussagen der elementaren Kombinatorik.

Die eine Richtung des Beweises ist recht einfach und auch bei Ruch und Schönhofer vollständig ausgeführt:

Existieren $F = (F_z, F_s)$ und $G = (G_z, G_s)$ mit injektivem $F_z \times G_s$, so ist für alle $i=1,\ldots,n$:

$$\sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Gamma) = \sum_{\zeta=1}^{i} |F_z^{-1}(\zeta)| = |F_z^{-1}(\{1,\ldots,i\})| =$$

$$= |F_z^{-1}(\{1,\ldots,i\}) \cap G_s^{-1}(\{1,\ldots,n\})| = |(F_z \times G_s)^{-1}(\{1,\ldots,i\} \times \{1,\ldots,n\})|$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{n} |(F_z \times G_s)^{-1}(\{1,\ldots,i\} \times \{\sigma\}) \leq \sum_{\sigma=1}^{n} \mathrm{Min}(i, G_s^{-1}(\sigma)|)$$

$$=: \sum_{\sigma=1}^{n} \mathrm{Min}(i, z_\sigma(\Delta)) \, ,$$

wobei das Ungleichheitszeichen der vorausgesetzen Injektivität von $F_z \times G_s$ wegen gilt.

Es ist aber für jedes Young-Diagramm Δ

$$(7) \qquad \sum_{\sigma=1}^{n} \mathrm{Min}(i, z_\sigma(\Delta)) = \sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Delta) ,$$

was, wenn man es nicht als bekannt oder unmittelbar einsichtig voraussetzen will (beide Zahlen bezeichnen die Anzahl der oberhalb der i-ten Zeile -incl. dieser selbst - stehenden Kästchen von Δ), wie folgt bewiesen werden kann. Es genügt offenbar

$$(8) \qquad \sum_{\sigma=1}^{n} (\mathrm{Min}(i, z_\sigma(\Delta)) - \mathrm{Min}(i-1, z_\sigma(\Delta)) = s_i(\Delta)$$

zu zeigen. Die linke Seite von (8) ist aber offenbar die Anzahl und damit gleich dem Maximum der $\sigma \in \{1,\ldots,n\}$ mit $z_\sigma(\Delta) \geq i$ und folglich nach (2) in der Tat gleich $s_i(\Delta)$.

Seien nun umgekehrt zwei Young-Diagramme Γ und Δ mit $\Gamma \subseteq \Delta$, also $\sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Gamma) \leq \sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Delta)$ gegeben. Wir behaupten, daß es zu jeder Einfüllung $G = (G_z, G_s)$ von Δ eine Einfüllung $F = (F_z, F_s)$ von Γ mit injektivem $F_z \times G_s$ gibt.

In Worten läßt sich die Konstruktionsvorschrift für F wie folgt beschreiben (vgl. in Abb. 2 die Übergänge (a) $\to$ (d), und (c) $\to$ (h)). Man betrachte in Δ in der letzten Spalte das unterste Kästchen. Wir nehmen an, daß dieses in der Zeile ζ_0 und der Spalte σ_0 liegt, daß also

$$(9) \qquad \sigma_0 = s_1(\Delta) = \ldots = s_{\zeta_0}(\Delta) > s_{\zeta_0+1}(\Delta)$$

gilt und folglich $\zeta_0 = \mathrm{Max}(\zeta | s_\zeta(\Delta) \geq \sigma_0) = z_{\sigma_0}(\Delta)$. Die dort vermöge G eingetragene Zahl i wird nun vermöge F wie folgt in Γ eingetragen:

Zunächst sucht man in Γ die gleiche Zeile ζ_0, auf. In dieser Zeile steht wegen $\Gamma \subseteq \Delta$ mindestens ein Kästchen, da sonst

$$\sum_{\zeta=1}^{\zeta_0-1} s_\zeta(\Delta) < \sum_{\zeta=1}^{\zeta_0} s_\zeta(\Delta) \leq n = \sum_{\zeta=1}^{\zeta_0-1} s_\zeta(\Gamma)$$

wäre.

Wir suchen nun in dieser Zeile das letzte, am weitesten rechts, also in der Spalte $s_{\zeta_0}(\Gamma) = \sigma_1$ stehende Kästchen auf und gehen in dessen Spalte, also in der Spalte σ_1, bis zum untersten Kästchen, das also in der Zeile $\zeta_1 = z_{\sigma_1}(\Gamma)$ steht, und tragen dort i ein. Nach Definition von ζ_1 gilt also $\zeta_0 \leq \zeta_1$ und

(10) $$\sigma_1 = s_{\zeta_0}(\Gamma) = s_{\zeta_0+1}(\Gamma) = \ldots = s_{\zeta_1}(\Gamma) > s_{\zeta_1+1}(\Gamma) \ .$$

Lassen wir nun in Δ und in Γ jeweils das durch i besetzte Kästchen weg, in Δ also das Kästchen "K_{ζ_0,σ_0}" ; in Γ das Kästchen "K_{ζ_1,σ_1}", so erhalten wir wieder Young-Diagramme Δ' und Γ' - diesmal mit je n-1 Kästchen -, für welche, wie weiter unten noch zu zeigen sein wird, wiederum $\Gamma' \subseteq \Delta'$, d.h.

(11) $$\sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Gamma') \leq \sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Delta') \quad \text{für alle } i=1,\ldots,n$$

gilt.

Wir können nun das Verfahren Kästchen für Kästchen fortsetzen und erhalten so unsere gesuchte Einfüllung F von Γ, von welcher noch zu zeigen ist, daß sie keine zwei Zahlen aus einer Spalte von Δ in eine Zeile von Γ einfüllt. Ein einfacher Induktionsschluß nach n reduziert dies auf die entsprechende Aussage für Zahlenpaare (j,i) aus der letzten Saplte von Δ. Wir haben also neben i auch j zu betrachten mit

$$G_s(j) = G_s(i) = \sigma_0 = s_1(\Delta)$$

und

$$G_z(j) = \zeta > \zeta_0 = G_z(i).$$

Wir müssen also in Γ neben der ζ_0-ten Zeile auch die höher gelegene ζ-te Zeile betrachten und in beiden bis zum jeweils letzten Kästchen nach rechts gehen. In dem zur Bestimmung des Platzes von j in Γ zu betrachtenden, bereits um mehrere Kästchen reduzierten Diagramm Γ'' sind bislang wegen $\zeta_1 \geq \zeta_0$ usw. nur Kästchen aus Zeilen echt unterhalb der Zeile ζ abgebaut, d.h. das letzte Kästchen aus der Zeile ζ von Γ ist bisher nicht entfernt worden und liegt deshalb auch noch in Γ''.

Zu zeigen ist, daß das unterste Kästchen K'' von Γ'' in der Spalte des letzten Kästchens aus der Zeile ζ von Γ in einer anderen, nämlich höheren Zeile liegt, als das unterste Kästchen $K = K_{\zeta_1,\sigma_1}$ von Γ in der Spalte des letzten Kästchens der Zeile ζ_0 von Γ. Da dieses Kästchen $K = K_{\zeta_1,\sigma_1}$ in Γ' und somit auch in Γ'' nicht mehr vorkommt, ist die Behauptung für den Fall, daß K'' und K in der gleichen Spalte liegen, aber trivial, während für den sonst nur noch möglichen Fall, daß K'' weiter rechts liegt, also $s_\zeta(\Gamma) > s_{\zeta_0}(\Gamma)$ gilt, auch das unterste Kästchen in der $\sigma = s_\zeta(\Gamma)$-ten Spalte höher als ζ_0 gelegen ist (da sonst $z_\sigma(\Gamma) \geq \zeta_0$ und somit nach (1) $s_{\zeta_0}(\Gamma) \geq \sigma = s_\zeta(\Gamma)$ gelten würde). Wie man sich leicht zusätzlich überlegen kann, ist in diesem Fall K'' bereits mit dem letzten Kästchen in der Zeile ζ identisch, was hier jedoch nicht weiter benötigt wird.

Zu zeigen bleibt also (11). Offenbar ist nach Konstruktion

$$\sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Gamma') = \begin{cases} \sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Gamma) & \text{für } i < \zeta_1 \\ \sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Gamma)-1 & \text{für } i \geq \zeta_1 \end{cases}$$

und

$$\sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Delta') = \begin{cases} \sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Delta) & \text{für } i < \zeta_0 \\ \sum_{\zeta=1}^{i} s_\zeta(\Delta)-1 & \text{für } i \geq \zeta_0 . \end{cases}$$

Da die Beziehung (6) vorausgesetzt wird, kann die Beziehung (11) nur verletzt sein, falls $\zeta_0 \lneqq \zeta_1$ ist und für ein i_0 mit $\zeta_0 \leq i_0 < \zeta_1$ gilt:

$$\sum_{\zeta=1}^{i_0} s_\zeta(\Gamma) = \sum_{\zeta=1}^{i_0} s_\zeta(\Delta) . \tag{12}$$

Hieraus und aus (6), angewandt für $i = i_0-1$, folgt $s_{i_0}(\Gamma) \geq s_{i_0}(\Delta)$, während aus (12) und aus (6), angewandt auf $i = i_0+1$, sofort $s_{i_0+1}(\Gamma) \leq s_{i_0+1}(\Delta)$ folgt. Da zudem nach (10) $s_{i_0}(\Gamma) = s_{i_0+1}(\Gamma) = \sigma_1$ gilt und ohnehin $s_{i_0+1}(\Delta) \leq s_{i_0}(\Delta)$ ist, folgt hieraus

$$s_{i_0+1}(\Gamma) = s_{i_0+1}(\Delta) = s_{i_0}(\Delta) = s_{i_0}(\Gamma) = \sigma_1. \tag{13}$$

Insbesondere gilt dann auch

$$\sum_{\zeta=1}^{i_0-1} s_\zeta(\Gamma) = \sum_{\zeta=1}^{i_0-1} s_\zeta(\Delta) \tag{14}$$

und somit schließlich durch weiteren schrittweisen Abbau auch

(15) $$\sum_{\zeta=1}^{\zeta_0} s_\zeta(\Gamma) = \sum_{\zeta=1}^{\zeta_0} s_\zeta(\Delta)$$

und

(16) $$s_{\zeta_0+1}(\Gamma) = s_{\zeta_0+1}(\Delta) = s_{\zeta_0}(\Delta) = s_{\zeta_0}(\Gamma)$$

im Widerspruch zu (9): $s_{\zeta_0+1}(\Delta) < s_{\zeta_0}(\Delta)$!