match no. 4 pp. 161 - 171 1978

DIREKTE BERECHNUNG SPEZIELLER ANZAHLEN IN PÓLYAS ABZÄHLTHEORIE

Karl-Josef Thürlings, Lehrstuhl D für Mathematik
der RWTH Aachen
Templergraben 64
D - 5100 Aachen

(received: August 1978)

Zusammenfassung: In dieser Arbeit wird eine Methode zur direkten Berechnung der Koeffizienten einer abzählenden Potenzreihe vorgestellt, die aus dem Zykelindex einer Permutationsgruppe durch "Pólya-Einsetzung" eines speziellen Gewichtspolynoms entstanden ist.

1. Einleitung:

Die Pólya-Theorie befaßt sich mit der Abzählung endlicher Strukturen unter einer Symmetriegruppe P, wobei P als Permutationsgruppe aufgefaßt werden kann. Die Anzahl der unter P äquivalenten Strukturen, die eine vorgegebene Eigenschaft erfüllen, erhalten wir als Koeffizient einer abzählenden Reihe. Im allgemeinen ist diese Reihe aus dem Zykelindex von P durch "Pólya-Einsetzung" eines Gewichtspolynoms entstanden (vgl. 1). Ein Beispiel hierfür ist die Abzählung der Isomorphietypen endlicher Graphen (ohne Schleifen und ohne Mehrfachkanten) mit n Knoten und p Kanten. In Übereinstimmung mit den Bezeichnungen in den Arbeiten 2, 3, 4 erhalten wir diese Anzahl als Koeffizient von $x_1^p x_2^{\binom{n}{2}-p}$ in

$$\mathrm{Zyk}(S_n^{\{2\}} \mid x_1+x_2) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n^{\{2\}}} \prod_{k=1}^{\binom{n}{2}} (x_1^k + x_2^k)^{a_k(\pi)} \quad .$$

Hierbei ist $a_k(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π der Länge k,

$$\mathrm{Zyk}(S_n^{\{2\}}) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n^{\{2\}}} \prod_{k=1}^{\binom{n}{2}} s_k^{a_k(\pi)}$$

der Zykelindex von $S_n^{\{2\}}$ und x_1+x_2 das Gewichtspolynom.

Diese Methode hat zwei Nachteile:
1. Für interessante Probleme scheitert diese Methode meist an der Komplexität der gestellten Aufgaben. Selbst für Datenverarbeitungsanlagen mit hoher Rechenkapazität ist die Berechnung von $\mathrm{Zyk}(S_n^{\{2\}} \mid x_1+x_2)$, etwa für $n \geq 10$, sehr aufwendig.
2. Interessiert man sich nur für wenige Koeffizienten der abzählenden Reihe, so muß im allgemeinen der gesamte Zykelindex bekannt sein und die "Pólya-Einsetzung" durchgeführt werden.

Es entsteht deshalb der Wunsch nach einer direkten Berechnungsmethode für die Koeffizienten einer abzählenden Reihe, die durch "Pólya-Einsetzung" aus dem Zykelindex einer Permutationsgruppe entstanden ist.

Wir wollen in dieser Arbeit für einen wichtigen Spezialfall eine direkte Berechnungsmethode angeben. Es wird sich zeigen, daß dies zu interessanten Konsequenzen in der Graphentheorie, der Theorie der 0-1-Matrizen, der Theorie der Booleschen Funktionen und der Darstellungstheorie Symmetrischer Gruppen führt.

2. Eine direkte Berechnungsmethode:

Wir betrachten eine endliche Gruppe G, zwei endliche Mengen M und N mit $|M| = 2$ und $|N| = n$ und eine Permutationsdarstellung $\alpha: G \to S_N$. Wir können annehmen, daß $M := \underline{2} := \{1,2\}$. Die Permutationsdarstellung α induziert eine Permutationsdarstellung γ^α auf $\underline{2}^N := \{f \mid f: N \to \underline{2}\}$, nämlich

$$\gamma^\alpha: G \to S_{\underline{2}^N} : g \mapsto \begin{pmatrix} f \\ f\cdot\alpha(g^{-1}) \end{pmatrix}_{f\in\underline{2}^N} .$$

Für ein $p\in\mathbb{N}$ sei $T_p := \{f\in\underline{2}^N \mid |f^{-1}[\{1\}]| = p\}$.

Wir wollen jetzt direkt die Anzahl der Bahnen von γ^α berechnen, die in T_p enthalten sind. Nach dem Lemma von Burnside genügt dazu die Kenntnis des Charakters der Permutationsdarstellung

$$\gamma_p^\alpha: G \to S_{T_p} : g \mapsto \begin{pmatrix} f \\ f\cdot\alpha(g^{-1}) \end{pmatrix}_{f\in T_p}$$

Zur Information sei daran erinnert, daß diese Anzahl nach dem klassischen Satz von Pólya der Koeffizient des Monoms $x_1^p x_2^{n-p}$ in

$$\mathrm{Zyk}(\alpha[G] \mid x_1+x_2) := \frac{1}{\alpha[G]} \sum_{\pi\in\alpha[G]} \prod_{k=1}^{n} (x_1^k + x_2^k)^{a_k(\pi)}$$

ist.

Die Menge $\underline{2}^N$ ist gerade die Menge der Indikatorfunktionen der Teilmengen von N. $\psi_A\in\underline{2}^N$ heißt Indikatorfunktion von $A\subseteq N$, falls für alle $y\in N$ gilt: $(\psi_A(y) = 1 \Leftrightarrow y\in A)$.
Aus diesem Grunde können wir T_p mit $P_p(N) := \{A\subseteq N \mid |A| = p\}$ identifizieren. Es ist jetzt leicht einzusehen, daß die Permutationsdarstellungen

$$\gamma_p^\alpha: G \to S_{T_p} : g \mapsto \begin{pmatrix} f \\ f\cdot\alpha(g^{-1}) \end{pmatrix}_{f\in T_p}$$

und

$$\delta_p^\alpha : G \to S_{P_p} : g \mapsto \left(\alpha(g)[A]^A\right)_{A\in P_p}$$

äquivalent sind. Diese entscheidende Tatsache führt uns zu unserem ersten Satz. Vorher führen wir noch ein Bezeichnung ein:
$(r \vdash p :\Leftrightarrow r = (r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{N}^p$ und $\sum_i ir_i = p)$.

<u>Satz 1:</u>
Für alle $g \in G$ gilt:

$$(a_1(\gamma_p^\alpha(g)) = \sum_{r \vdash p} \prod_{k=1}^{p} \binom{a_k(\alpha(g))}{r_k})$$

<u>Beweis:</u>
Für alle $g \in G$ und $A \in P_p(N)$ gilt:
$(\alpha(g)[A] = A \Leftrightarrow A$ ist Vereinigung von Zyklen der Permutation $\alpha(g))$.

qed.

Bekanntlich gilt für alle $g \in G$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$a_1(\alpha(g^k)) = a_1((\alpha(g))^k) = \sum_{i|k} ia_i(\alpha(g))$$

(vgl. 2 (5.4; 5.5)). Mit Hilfe der Möbiusinversion auf dem Teilerverband folgt:

$$a_k(\alpha(g)) = \frac{1}{k} \sum_{i|k} \mu(\tfrac{k}{i}) a_1(\alpha(g^i)).$$

Vergleichen wir das letzte Ergebnis mit Satz 1, dann können wir die gewünschte Anzahl der Bahnen von γ_p^α direkt berechnen, vorausgesetzt, wir kennen den Permutationscharakter von α und für jedes $g \in G$ und $i \in \{1, \ldots, p\}$ die Konjugiertenklasse von g^i.

<u>Satz 2:</u>
Die Anzahl der Bahnen von γ_p^{α} ist

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \sum_{r\vdash p} \prod_{k=1}^{p} \binom{\frac{1}{k} \sum_{i|k} \mu(\frac{k}{i})\, a_1(\sigma(g^i))}{r_k} .$$

Dies ist gerade die Vielfachheit der Einsdarstellung EG von G in γ_p^{α}, also (γ_p^{α},EG), (vgl. 9 (Satz 5.10)). Für die praktische Berechnung genügt es, über ein Repräsentantensystem der Konjugiertenklassen von G zu summieren und den Summanden mit der entsprechenden Ordnung der Konjugiertenklasse zu multiplizieren.

Wir erhalten als Folgerung:

$$\mathrm{Zyk}(\alpha[G] \mid x_1+x_2) = \sum_{p=0}^{n} (\gamma_p^{\alpha},EG)x_1^p x_2^{n-p} .$$

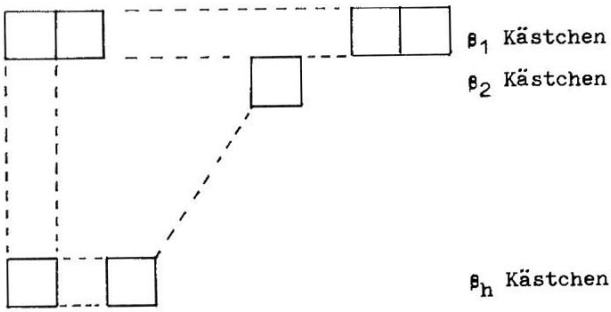
Das Polynom $\mathrm{Zyk}(\alpha[G] \mid x_1+x_2)$ ist ein symmetrisches Polynom in $\mathbb{Q}[x_1,x_2]$ (vgl. 3 (4.5)). Deshalb gilt für alle $p\in\{0, \ldots ,n\}$: $((\gamma_p^{\alpha},EG) = (\gamma_{n-p}^{\alpha},EG))$. Wir brauchen also nur für $\frac{n}{2} \geq p \geq 0$ die Vielfachheiten (γ_p^{α},EG) zu berechnen.

Da $n = |N|$, können wir nach geeigneter Numerierung der Elemente in N die Gruppe $\alpha[G]$ als Untergruppe der S_n auffassen, der Symmetrischen Gruppe auf $\{1, \ldots ,n\}$.

<u>Satz 3:</u>
Die Anzahl der Doppelnebenklassen $(S_{n-p}xS_p)\pi(\alpha[G])$ in S_n ist (γ_p^{α},EG).
<u>Beweis:</u>
(vgl. 4 (Kapitel 3))

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Folgerungen sich hieraus für die Darstellungstheorie der Symmetrischen Gruppen ergeben.

Eine Partition von n aus h Teilen ist bekanntlich eine monoton fallende Folge $\beta := (\beta_1, \ldots, \beta_h)$ natürlicher Zahlen mit $\sum \beta_i = n$. Wir schreiben dafür kurz $\beta \vdash n$. Für $\beta \vdash n$ sei $[\beta]$ die zu dem Young-Diagramm



gehörige irreduzible Darstellung der S_n (vgl. 6 (4.6)).

Für eineUntergruppe $P \leq S_n$ sei $EP\uparrow S_n$ die von der Einsdarstellung von P in die S_n induzierte Darstellung.

<u>Satz 4:</u>

(1) Ist $0 < p \leq \frac{n}{2}$, so gilt:

$$((E(\alpha[G])\uparrow S_n,[(n-p,p)]) = (\gamma_p^{\alpha},EG) - (\gamma_{p-1}^{\alpha},EG))$$

(2) $((E(\alpha[G])\uparrow S_n,[(n)]) = (\gamma_0^{\alpha},EG) = 1)$

<u>Beweis:</u>

Der Beweis zu (2) ist trivial.

Im anderen Fall gilt nach einem Satz von Littlewood:

Die Anzahl der Doppelnebenklassen $(S_{n-p}xS_p)\pi(\alpha[G])$ der S_n ist:

$$\sum_{\beta\vdash n} (E(S_{n-p}xS_p)\uparrow S_n,[\beta])(E(\alpha[G])\uparrow S_n,[\beta]) \text{ , (vgl. 5 (7.4)).}$$

Nach einem Ergebnis von Liebler und Vitale (vgl. 6 (Lemma 2)) folgt:

$$E(S_{n-p}xS_p)\uparrow S_n = \sum_{i=0}^{p} [(n-p+i,p-i)].$$

Mit Satz 3 erhalten wir dann die Behauptung. qed.

Der letzte Satz hat eine für die Anwendungen interessante Konsequenz.

<u>Satz 5:</u>
Für alle p mit $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$ gilt:
$((\gamma^{\alpha}_{p-1}, EG) \leq (\gamma^{\alpha}_{p}, EG))$.

An dieser Stelle sollte erwähnt werden, daß die Sätze 3, 4, 5 in wesentlich allgemeinerer Form gelten. Man benötigt aber dann Kenntnisse über den Diagrammverband (vgl. 7) und die Littlewood-Richardson-Regel (vgl. 6 (4.51)).

3. Anwendungen:

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir zur Abkürzung $\underline{n} := \{1, \ldots, n\}$.

<u>Beispiel 1:</u> (Graphentheorie)

$P_2(\underline{n}) \quad := \quad \{A \subseteq \underline{n} \mid |A| = 2\}$

$\underline{n}^2 \quad := \quad \{(y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \in \underline{n}\}$

$\underline{n}^{<2>} \quad := \quad \{(y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \in \underline{n} \text{ und für } i \neq j\text{: } (y_i \neq y_j)\}$

Wir betrachten die Permutationsdarstellungen

$$\alpha\colon S_n \to S_{P_2(\underline{n})} \quad : \pi \mapsto \begin{pmatrix} A \\ \pi[A] \end{pmatrix}$$

(Die Darstellung der S_n auf den Paarmengen von $\underline{n}$)

$$\lambda\colon S_n \to S_{\underline{n}^2} \quad : \pi \mapsto \begin{pmatrix} (i,j) \\ (\pi(i), \pi(j)) \end{pmatrix}$$

(Das innere Tensorprodukt der natürlichen Darstellung der S_n mit sich selbst)

$$\sigma\colon S_n \to S_{\underline{n}^{<2>}} \quad : \pi \mapsto \begin{pmatrix} (i,j) \\ (\pi(i), \pi(j)) \end{pmatrix}$$

(Die Darstellung der S_n auf den injektiven 2-Tupeln von $\underline{n}$)

Es ist klar, daß wir für ein geeignetes $t \in \mathbb{N}$ die Mengen $P_2(\underline{n})$, $\underline{n}^2$, $\underline{n}^{<2>}$ durch $P_t(\underline{n})$, $\underline{n}^t$, $\underline{n}^{<t>}$ ersetzen können.

Für die Permutationscharakteren an der Stelle $\pi \in S_n$ gilt:

$$a_1(\alpha(\pi)) = \frac{1}{2}\,(a_1(\pi)^2 - a_1(\pi)) + a_2(\pi)$$
$$a_1(\lambda(\pi)) = a_1(\pi)^2$$
$$a_1(\sigma(\pi)) = a_1(\pi)^2 - a_1(\pi)$$

Für ein geeignetes $p \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl der Bahnen von γ_p^{α}, γ_p^{λ} und γ_p^{σ} die Anzahl der Isomorphietypen von Graphen (ohne Schleifen und ohne Mehrfachkanten), von gerichteten Graphen (mit Schleifen aber ohne Mehrfachkanten) und von gerichteten Graphen (ohne Schleifen und ohne Mehrfachkanten) mit n Knoten und p Kanten.

Wir haben damit für das am Anfang erwähnte Beispiel eine direkte Berechnungsmethode gefunden.

Die Monotoniebedingung im Satz 5 sagt nun aus, daß für $1 \leq p \leq \frac{1}{2}\binom{n}{2}$ die Anzahl der Isomorphietypen von Graphen (ohne Schleifen und ohne Mehrfachkanten) mit p Kanten und n Knoten größer oder gleich der Anzahl der Isomorphietypen von Graphen mit p-1 Kanten und n Knoten ist. Entsprechende Aussagen gelten für die Isomorphietypen gerichteter Graphen.

<u>Beispiel 2:</u> (0-1-Matrizen)

$\underline{m}x\underline{n} := \{\, (i,j) \mid i \in \underline{m},\ j \in \underline{n} \,\}$

$\sigma\colon S_m x S_n \to S_{\underline{m}x\underline{n}} : (\pi,\rho) \mapsto \left(\begin{matrix}(i,j)\\(\pi(i),\rho(j))\end{matrix}\right)$

(Das äußere direkte Tensorprodukt der natürlichen Darstellungen der S_n und der S_m)

Für den Permutationscharakter an der Stelle $(\pi,\rho) \in S_m x S_n$ gilt: $(a_1(\sigma((\pi,\rho))) = a_1(\pi)a_1(\rho))$.

Die Menge $\underline{2}^{\underline{m}x\underline{n}}$ können wir mit der Menge der mxn 0-1-Matrizen identifizieren. Die Permutationsdarstellung γ^{σ} liefert die übliche Äquivalenzrelation auf der Menge der mxn 0-1-Matrizen:

Zwei mxn 0-1-Matrizen A, B heißen äquivalent, falls Permutationsmatrizen Q, P existieren mit AQ = PB.

Wir erhalten: Für ein geeignetes $p \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl der Äquivalenzklassen von mxn 0-1-Matrizen mit p Einsen die Anzahl der Bahnen von γ_p^{σ}.

<u>Beispiel 3:</u> (Boolesche Funktionen)
In diesem Beispiel identifizieren wir $\underline{2}^{\underline{n}}$ mit der Menge $\{ (\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0,1\}\}$.

Für $H \leq S_n$ definieren wir die Permutationsdarstellung

$$\sigma: S_2 \wr H \to S_{\underline{2}^{\underline{n}}} : (f;\pi) \mapsto \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$\Phi(i) := f(i)\Psi(\pi^{-1}(i)) \text{ für } i \in \underline{n}$$

(Zu Kranzprodukten vgl. 5,6)

Für alle $(f;\pi) \in S_2 \wr H$ gilt:

$$(a_1(\sigma((f;\pi))) = \prod_{i=1}^{c(\pi)} a_1(g_i(f;\pi))) \quad .$$

Hierbei ist $c(\pi)$ die Anzahl der Zyklen von π und $g_i(f;\pi) \in S_2$ das Zyklenprodukt vom i-ten Zyklus von π bzgl. f (vgl. 5 (1.8; 2.6)) .

Die Indikatorfunktionen $\underline{2}^{(\underline{2}^{\underline{n}})}$ können wir als Boolesche Funktionen (Schaltfunktionen) mit n Eingängen interpretieren.

Wir erhalten: Für ein geeignetes $p \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl der Isomorphieklassen Boolescher Funktionen unter der Symmetriegruppe $S_2 \wr H$ mit n Eingängen und p von 0 verschiedenen Ausgangswerten die Anzahl der Bahnen von γ_p^{σ}.

Im allgemeinen betrachtet man die Symmetriegruppen
$S_2 \wr S_n$ (S_n: Symmetrische Gruppe vom Grad n),
$S_2 \wr A_n$ (A_n: Alternierende Gruppe vom Grad n) oder
$S_2 \wr C_n$ (C_n: Zyklische Gruppe vom Grad n) .

In jedem Fall gilt die Monotoniebedingung von Satz 5.

Bisher waren nur schwer zugängliche abzählende Potenzreihen für die Lösung der obigen Probleme bekannt (vgl. 10 (S. 109 ff)) .

Beispiel 4:
Für $H \leq S_n$ sei $\alpha: H \to S_n : \pi \mapsto \pi$ die natürliche Einbettung. Die Indikatorfunktionen $\underline{2}^{\underline{n}}$ können wir als Färbungen mit 2 Farben auf einer Struktur mit n Punkten und Symmetriegruppe H auffassen. Die Anzahl der unter H verschiedenen Färbungen mit p Farben der einen, n-p Farben der anderen Sorte, ist nach Satz 1:

$$\frac{1}{|H|} \sum_{\pi \in H} \sum_{r \vdash p} \prod_{k=1}^{p} \binom{a_k(\pi)}{r_k} \quad .$$

Eine gruppentheoretische Interpretation:
Mit der Monotoniebedingung aus Satz 5 erhalten wir für den Spezialfall $H = \{1_{S_n}\}$ und für alle t mit

$0 \leq t \leq \frac{n}{2}$ die Folge: $\binom{n}{0} \leq \ldots \leq \binom{n}{t}$.

Dies zeigt weiter, daß wir die Untergruppen H der S_n nach den aufsteigenden Folgen

$$(\gamma_0^{\alpha}, EH) \leq \ldots \leq (\gamma_t^{\alpha}, EH)$$

klassifizieren können.

Für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ und $H \leq S_n$ gilt ferner:

$$1 \leq (\gamma_i^{\alpha}, EH) \leq \binom{n}{i} = \binom{n}{n-i} \quad .$$

4. Literatur:

1. G. Pólya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen
Acta mathematica 68 (1937), 145-254

2. A. Kerber und W. Lehmann, On Graphs and their Enumeration
MATCH 3 (1977), 67-86
3. A. Kerber, On Graphs and their Enumeration II
MATCH 2 (1976), 17-34
4. A. Kerber, On Graphs and their Enumeration
MATCH 1 (1975), 5-10
5. A. Kerber, Representations of Permutation Groups II
Lecture Notes in Math., Vol. 495, Springer-Verlag, 1975
6. A. Kerber, Representations of Permutation Groups I
Lecture Notes in Math., Vol. 240, Springer-Verlag, 1971
7. A. Kerber, The Diagram Lattice as Structural Principle in Mathematics
in: Group Theoretical Methods in Physics, Proceedings, Tübingen 1977, Lecture Notes in Physics, Vol. 79, Springer-Verlag, 1978
8. R.A. Liebler und M.R. Vitale, Ordering the Partition Characters of the Symmetric Group
Journal of Algebra 25 (1973), 487-489
9. B. Huppert, Endliche Gruppen
Springer-Verlag, 1967
10. F. Harary und E.M. Palmer, Graphical Enumeration
Academic Press, 1973