

## ETUDE GRAPHIQUE DE LA TABLE D'UN GROUPE FINI.

I. SAMUEL

22, avenue de la Porte Brunet, 75019 Paris

(received: July 11, 1977)

Résumé. L'ensemble des graphes lignes et colonnes du tableau est représenté par un diagramme, dont la simple vue permet de déterminer les classes du groupe et l'ordre de leurs éléments. On y lit directement entre autres résultats les sous-groupes cycliques et normalisateurs des éléments, leurs complexes associés, ainsi que l'ensemble des groupes automorphes internes.

1) GRAPHES LIGNES ET COLONNES DE LA TABLE DE GROUPE.

Considérons un groupe fini  $G = \{x_i\}$ , d'ordre  $n$ , avec  $i = 1, 2, \dots, n$ . Nous citerons souvent à titre d'exemple le groupe  $\Gamma$ , d'ordre 18, dont la table est présentée dans le tableau 1.

A la ligne (resp. colonne), dont le premier élément est  $x_m$  correspond le graphe  $L_m$  (resp.  $C_m$ ), que nous définirons par la suite. Les relations bijectives entre les 4 ensembles

$G = \{x_i\}$ ,  $C = \{C_i\}$ ,  $L = \{L_i\}$  et l'ensemble des indices  $\mathcal{I} = \{i\}$  sont évidentes.

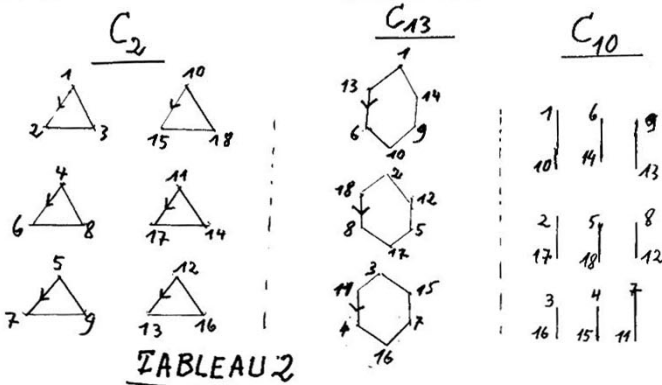
a) Structure des graphes lignes et colonnes.

Les arcs. Chacun des arcs constituant le graphe  $C_i$  a pour indice initial celui d'un élément de  $G$  dans la colonne  $i$  et pour indice terminal celui de l'élément de la même ligne dans la colonne d'indice  $i$ .

Définition analogue pour les arcs du graphe  $L_i$ .

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$	$x_{16}$	$x_{17}$	$x_{18}$
$x_1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$	$x_{16}$	$x_{17}$	$x_{18}$
$x_2$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_4$	$x_5$	$x_{17}$	$x_{13}$	$x_{15}$	$x_{18}$	$x_{12}$	$x_{14}$	$x_{10}$	$x_{16}$	$x_{11}$
$x_3$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_8$	$x_9$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_{16}$	$x_{18}$	$x_{14}$	$x_{11}$	$x_{15}$	$x_{12}$	$x_{17}$	$x_{10}$	$x_{13}$
$x_4$	$x_4$	$x_6$	$x_8$	$x_5$	$x_1$	$x_7$	$x_2$	$x_9$	$x_3$	$x_{15}$	$x_{17}$	$x_{13}$	$x_{16}$	$x_{11}$	$x_{18}$	$x_{12}$	$x_{14}$	$x_{10}$
$x_5$	$x_5$	$x_7$	$x_9$	$x_1$	$x_4$	$x_2$	$x_6$	$x_3$	$x_8$	$x_{18}$	$x_{14}$	$x_{16}$	$x_{12}$	$x_{17}$	$x_{10}$	$x_{13}$	$x_{11}$	$x_{15}$
$x_6$	$x_6$	$x_8$	$x_4$	$x_7$	$x_2$	$x_9$	$x_3$	$x_5$	$x_1$	$x_{14}$	$x_{16}$	$x_{18}$	$x_{10}$	$x_{13}$	$x_{11}$	$x_{15}$	$x_{12}$	$x_{17}$
$x_7$	$x_7$	$x_9$	$x_5$	$x_2$	$x_6$	$x_3$	$x_8$	$x_1$	$x_4$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{10}$	$x_{15}$	$x_{16}$	$x_{17}$	$x_{18}$	$x_{13}$	$x_{14}$
$x_8$	$x_8$	$x_4$	$x_6$	$x_9$	$x_3$	$x_5$	$x_2$	$x_7$	$x_1$	$x_{18}$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{18}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$	$x_{16}$
$x_9$	$x_9$	$x_5$	$x_7$	$x_3$	$x_8$	$x_1$	$x_4$	$x_2$	$x_6$	$x_{13}$	$x_{15}$	$x_{17}$	$x_{11}$	$x_{10}$	$x_{16}$	$x_{11}$	$x_{18}$	$x_{12}$
$x_{10}$	$x_{10}$	$x_{15}$	$x_{18}$	$x_{17}$	$x_{16}$	$x_{14}$	$x_{12}$	$x_{11}$	$x_{13}$	$x_1$	$x_8$	$x_7$	$x_9$	$x_6$	$x_2$	$x_5$	$x_4$	$x_3$
$x_{11}$	$x_{11}$	$x_{17}$	$x_{14}$	$x_{13}$	$x_{18}$	$x_{16}$	$x_{10}$	$x_{12}$	$x_{15}$	$x_7$	$x_1$	$x_8$	$x_4$	$x_3$	$x_9$	$x_6$	$x_2$	$x_5$
$x_{12}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{16}$	$x_{15}$	$x_{14}$	$x_{18}$	$x_{11}$	$x_{10}$	$x_{17}$	$x_8$	$x_7$	$x_1$	$x_2$	$x_5$	$x_4$	$x_3$	$x_9$	$x_6$
$x_{13}$	$x_{13}$	$x_{16}$	$x_{12}$	$x_{18}$	$x_{11}$	$x_{10}$	$x_{17}$	$x_{15}$	$x_{14}$	$x_9$	$x_2$	$x_4$	$x_6$	$x_1$	$x_5$	$x_8$	$x_3$	$x_7$
$x_{14}$	$x_{14}$	$x_{11}$	$x_{17}$	$x_{12}$	$x_{15}$	$x_{13}$	$x_{18}$	$x_{16}$	$x_{10}$	$x_6$	$x_5$	$x_3$	$x_1$	$x_9$	$x_8$	$x_2$	$x_7$	$x_4$
$x_{15}$	$x_{15}$	$x_{18}$	$x_{10}$	$x_{14}$	$x_{12}$	$x_{11}$	$x_{13}$	$x_{17}$	$x_{16}$	$x_4$	$x_9$	$x_2$	$x_3$	$x_7$	$x_6$	$x_1$	$x_5$	$x_8$
$x_{16}$	$x_{16}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{10}$	$x_{17}$	$x_{15}$	$x_{14}$	$x_{18}$	$x_{11}$	$x_3$	$x_6$	$x_5$	$x_7$	$x_4$	$x_1$	$x_9$	$x_8$	$x_2$
$x_{17}$	$x_{17}$	$x_{14}$	$x_{11}$	$x_{16}$	$x_{10}$	$x_{12}$	$x_{15}$	$x_{13}$	$x_{18}$	$x_2$	$x_4$	$x_9$	$x_5$	$x_8$	$x_3$	$x_7$	$x_6$	$x_1$
$x_{18}$	$x_{18}$	$x_{10}$	$x_{15}$	$x_{11}$	$x_{13}$	$x_{17}$	$x_{16}$	$x_{14}$	$x_{12}$	$x_5$	$x_3$	$x_6$	$x_8$	$x_2$	$x_7$	$x_4$	$x_1$	$x_9$

TABLEAU 1



Exemple. (Tableau 1) L'arc (7,12) est un arc de  $C_{11}$  et de  $L_{10}$ .

Les relations fondamentales sont les suivantes:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Arc } ab = \text{arc de } C_i \iff x_b = x_a \cdot x_i \\ \text{Arc } ab = \text{arc de } L_i \iff x = x_i \cdot X_a \end{array} \right.$$

Chacun des graphes lignes et colonnes est constitué par n arcs.

Les composantes des graphes colonne. Considérons l'ensemble des arcs colonne constituant  $C_i$ . Si l'on fait coïncider les extrémités des arcs de même indice, (une fois comme indice initial et une fois comme indice terminal) on obtient des circuits réguliers disjoints, les composantes du graphe  $C_i$ .

Considérons la composante principale, celle qui contient l'indice 1. La suite ordonnée des indices des sommets est 1, a, b, c... On a d'après (1)

$$\begin{array}{l} x_a = x_1 \cdot x_i \quad x_b = x_a \cdot x_i \quad x_c = x_b \cdot x_i \dots\dots \\ x_a = x_i^2, \quad x_b = x_i^3 \quad x_c = x_i^4 \dots\dots\dots \end{array}$$

Les indices de la composante principale de  $C_i$  sont ceux de la suite ordonnée du groupe cyclique  $Z_i$  de l'élément  $x_i$ . Les indices de la composante principale de  $C_{13}$

(Tableau 2) sont 1, 13, 6, 10, 9 et 14. Le tableau 1 permet de vérifier  $x_6 = x_{13}^2, x_{10} = x_{13}^3, x_9 = x_{13}^4, x_{14} = x_{13}^5$

Considérons une autre composante de  $C_i$ . La suite des indices est a, b, c, d... L'application de la relation (1)

$$\text{conduit aux relations } x_b = x_a \cdot x_i, \quad x_c = x_a \cdot x_i^2 \text{ etc.}$$

Les indices de chacune de ces composantes sont ceux de la suite ordonnée d'un complexe associé à gauche de  $Z_i$ .

Conclusion. Le graphe  $C_i$ , comportant n arcs et n sommets, est constitué d'un ensemble de circuits réguliers disjoints, ses composantes. La longueur de chaque composante est égale à l'ordre du groupe cyclique de  $x_i$ .

Exemples. Groupe  $\Gamma$ ; Les composantes de  $C_1$  sont des boucles.  
(1,1),(2,2).....

Les composantes de  $C_{10}$  (Tableau 2) sont des circuits de longueur 2 (représentés par des segments), celles de  $C_2$  sont des circuits de longueur 3, celles de  $C_{13}$  des circuits de longueur 6.

Composantes des graphes ligne. On arrive à des résultats analogues. La composante principale de  $L_i$  est la même que celle de  $C_i$ . Les indices des sommets des autres composantes sont ceux des complexes associés à droite de  $Z_i$ .

b) Relations internes des ensembles C et L.

Définition du produit  $C_p = C_m C_n$ . Chacun des n arcs ab de  $C_m$  s'associe à l'un des n arcs bc de  $C_n$  pour donner l'un des n arcs ac de  $C_p$ . (Définition analogue pour le produit de graphes ligne).

Exemple (Tableau 2)  $C_{13} \cdot C_2 = C_p$

Arc 1,13 de  $C_{13}$  s'associe à l'arc 13,16 de  $C_2$  Arc 1,16  
16,7 " " 7,9 " 16,9

.....  
; .....  
 $C_p$  est constitué par les arcs (1,16), (16,9) e tc.

Les ensembles C et G sont isomorphes.

Arc ab de  $C_m$  s'associe à l'arc bc de  $C_n \rightarrow$  arc ac de  $C_p$

$$\left. \begin{array}{l} x_b = x_a x_m \\ x_c = x_b x_n \end{array} \right\} \rightarrow x_c = x_a x_m x_n$$

Les images dans G sont  $x_m$  pour  $C_m$ ,  $x_n$  pour  $C_n$  et  $x_m x_n$  pour  $C_p$   
En faisant le calcul de  $L_p$ , on trouve que  $L_p$  est l'image dans L de  $x_m x_n$ .

Exemples d'opérations effectuées sur les graphes colonne.

Les ensembles C et G étant isomorphes, les relations (1) sont

applicables en remplaçant les éléments de G par leurs images dans C. Il en résulte que si  $C_m C_n = C_p$ , l'arc mp est un arc de  $C_n$ , l'arc np est un arc de  $C_m$ .

Exemple (Tableau 2). (4,16) est un arc de  $C_{13}$   $C_4 C_{13} = C_{16}$   
Elément inverse  $C_m^{-1}$  de  $C_m$ . L'élément inverse s'obtient en inversant l'orientation de toutes les composantes de  $C_m$ .

Graphe	$C_m$	$C_m^{-1}$	$C_1$
Arcs	ab	ba	aa (Boucle)

Mécanisme de la transformation d'un élément  $C_s$  par un élément  $C_m$ . Soit  $C_t$  l'élément transformé.

On remplace dans  $C_s$  chaque indice par l'indice terminal correspondant dans  $C_m$ .

Exemple .Tableau 2. Transformons  $C_{13}$  par  $C_2$ . L'indice 1 dans  $C_{13}$  est remplacé par 2, indice terminal de 1 dans  $C_2$ .

De même on remplace dans  $C_{13}$  l'indice 13 par 16, 6 par 8 etc

Démonstration

Graphe	$C_m^{-1}$	$C_s$	$C_m$	$C_t$
Arcs	ab	bc	cd	ad
Arcs	dc	cf	fg	dg

Le chemin bcf de  $C_s$  est devenu chemin adg dans  $C_t$

Or  $C_m$  contient ba, cd, et fg.

Nous verrons plus loin qu'on obtient les transformés des éléments par lecture directe sur les graphes (voir 3)]

## 2) DIAGRAMME DE LA TABLE DE GROUPE.

Nous avons démontré<sup>(1)</sup>

a) Chaque composante figure une fois et une seule dans l'ensemble des composantes de C, une fois et une seule dans l'ensemble des composantes de L.

b) Pour que  $x_i$  et  $x_j$  appartiennent à une même classe, il faut et il suffit que  $L_i$  et  $C_j$  aient une composante commune.

c) Le diagramme de la table de groupe (Pour le groupe  $\Gamma$  tableau 3) représente l'ensemble des composantes de C et L. D'après b) il se divise en blocs disjoints, chacun de ces blocs correspondant à une classe du groupe. Chaque colonne du bloc contient un graphe colonne, chaque ligne un graphe ligne.

La simple vue du diagramme met en évidence la partition de G en classes, ainsi que l'ordre des éléments de cette classe. Le tableau 3 montre que  $\Gamma$  comprend une classe  $\{x_1\}$  dont l'élément est d'ordre 1, une classe dont les éléments sont d'ordre 2, cinq classes dont les éléments sont d'ordre 3 et deux classes dont les éléments sont d'ordre 6.

On distingue également les 3 éléments invariants du groupe, auxquels correspondent les blocs à 1 ligne et 1 colonne

3) LES CASES DU DIAGRAMME ET LEURS PROPRIÉTÉS.

a) Chaque bloc se divise en cases. La case i/j est la case contenant les composantes communes à  $L_i$  et  $C_j$ . A la case i/j correspond le sous-ensemble  $E_{i/j}$  de G, dont les éléments sont les images dans G des indices figurant dans la case i/j

Exemple: Tableau 3  $E_{14/18} = \{x_2, x_8, x_9, x_{11}, x_{15}, x_{16}\}$   
 Nous avons démontré les propriétés suivantes<sup>(1)</sup>

b) Les éléments de  $E_{i/j}$  sont les éléments de G, transformant  $x_i$  en  $x_j$ . Il en résulte que  $E_{i/i} = N_i$  est le normalisateur de l'élément  $x_i$ . Exemple  $N_{10} = \{x_1, x_6, x_9, x_{10}, x_{13}, x_{14}\}$

c)  $E_{i/j}$  est un complexe associé à droite de  $N_i$ , à gauche de  $N_j$ .

d) Le commutateur  $k_{i,m}$  de l'élément  $x_i$  avec un élément  $x_m$  est le même pour tous les  $x_m \in E_{i/j}$ . On a  $k_{i,m} = x_i^{-1} x_j$



Cette propriété nous conduit à une simplification appréciable du calcul des commutateurs. Considérons une classe K du groupe G avec  $K = \{x_a, x_b, \dots, x_m, \dots\}$  contenant h éléments. Elle nous fournit ses commutateurs d'après le tableau ci-dessous.

	$x_a$	$x_b$	...	$x_m$	...
$x_a^{-1}$					
$x_b^{-1}$					
$\vdots^{-1}$					
$x_m^{-1}$					

Les éléments diagonaux sont tous  $x_1$ , qui fait toujours partie des commutateurs. Les éléments à gauche de la diagonale sont les inverses de ceux qui figurent à droite.

Le nombre d'opérations est pour chaque classe  $(h^2 - h)/2$ .

En ne tenant pas compte des invariants qui conduisent à  $x_1$ , on obtient pour les 3 classes de 2 éléments et les 3 classes de 3 éléments  $3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 12$  opérations.

Si l'on calcule les expressions  $x_a^{-1} x_b^{-1} x_a x_b = k_{ab}$  par la méthode classique, on opère, en éliminant les invariants, sur  $18 - 3 = 15$  couples. Le nombre de combinaisons est  $15!/2 \cdot 13! = 105$ .

e) L'ensemble  $E = x_m^{-1} K$  (avec  $x_m \in K$ ) est un ensemble de commutateurs. On en déduit  $K = x_m E \cdot x_1$ .

On sait que le groupe commutateur comme chaque sous-groupe invariant, contient la classe complète de chacun de ses éléments. La relation précédente nous montre que les complexes associés au groupe commutateur jouissent de la même propriété.

f) Rappelons qu'on obtient un groupe automorphe interne en transformant tous les éléments du groupe par un seul de ses éléments. Ces groupes sont déterminés par lecture directe sur le diagramme; l'ensemble des graphes des



## Graphes des groupes automorphes internes de $\Gamma$

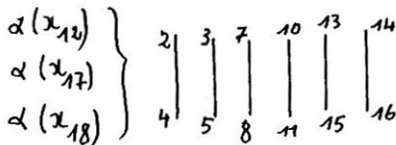
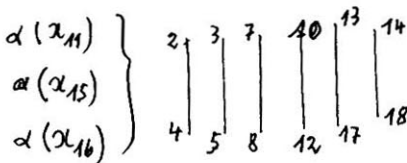
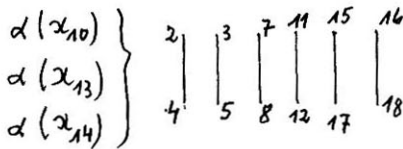
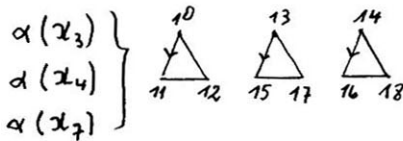
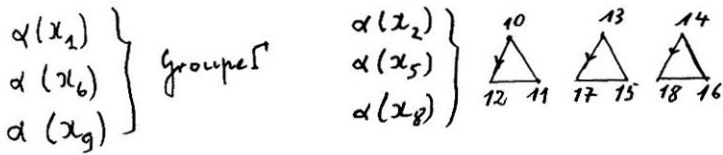


TABLEAU 4

groupes automorphes internes de  $\Gamma$  est présenté dans le tableau 4.

Exemple. Transformation du groupe par  $x_3$ . Les cases non diagonales contenant l'indice 3 sont 10/11, 11/12, 12/10, 13/15, 15/17, 17/13, 14/16, 16/18 et 18/14. On obtient ainsi le graphe  $\alpha(x_3)$  du tableau 4.

Remarque. Le tableau 4 montre que les éléments  $x_3, x_4$  et  $x_7$  conduisent au même groupe automorphe. Ces éléments sont les produits de l'un d'eux par les éléments invariants  $x_1, x_9, x_9$  de  $\Gamma$ . En effet étant donnés 2 éléments  $x_a$  et  $x_b$ , soit  $x_m$  un élément quelconque du groupe. Si  $x_a$  et  $x_b$  produisent la même transformation on a  $x_a^{-1} x_m x_a = x_b^{-1} x_m x_b$   
 $x_a x_a^{-1} x_m x_a x_b^{-1} = x_m$  ce qui montre que  $x_a x_b^{-1}$  est un élément invariant du groupe.

Il en résulte que le nombre de groupes automorphes internes est  $n/n_i$ ,  $n_i$  étant le nombre d'éléments invariants du groupe.

#### 4) ETUDE DES PUISSANCES $C_i^q$ de $C_i$ .

a) Les indices des sommets d'une composante  $\gamma(C_i^q)$  de  $C_i^q$  figurent dans une seule composante  $\gamma(C_i)$  de  $C_i$ .

Soit en effet  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$  la suite ordonnée des indices figurant dans  $\gamma(C_i)$ .

Les suites ordonnées des composantes de  $\gamma(C_i^2)$  sont respectivement  $a_0, a_2, a_4, \dots$  et  $a_1, a_3, a_5, \dots$ .

Pour  $\gamma(C_i^q)$  on obtient une suite  $a_0, a_q, a_{2q}, \dots$ .

Tous ces indices figurent dans la composante  $\gamma(C_i)$

b) Ordre  $\omega_i^q$  de  $x_i^q$ . Soit  $\omega_i$  l'ordre de  $x_i$ . Rappelant que cet ordre est égal à la longueur de chaque composante de  $C_i$ , le calcul de l'ordre des puissances s'effectue très simplement, comme le montrent les exemples suivants:

Ordre de $x_i$	Calcul de $\omega_j$	Résultats
$\omega_1 = 6$	$\omega_1 \times 1 = 6$ $\omega_2 \times 2 = 6$ $\omega_3 \times 3 = 6$	$\omega_1 = \omega_5 = 6$ $\omega_2 = \omega_4 = 3$ $\omega_3 = 2$
$\omega_1 = 5$	$\omega_1 \times 1 = 5$ $\omega_2 \times 2 = 10$	$\omega_1 = \omega_4 = 5$ $\omega_2 = \omega_3 = 5$
$\omega_1 = 8$	$\omega_1 \times 1 = 8$ $\omega_2 \times 2 = 8$ $\omega_3 \times 3 = 24$ $\omega_4 \times 4 = 8$	$\omega_1 = \omega_7 = 8$ $\omega_2 = \omega_6 = 4$ $\omega_3 = \omega_5 = 8$ $\omega_4 = 2$

Remarque importante.  $x_i^q$  est du même ordre  $\omega$  que  $x_i$  si  $\omega$  et  $q$  sont premiers entre eux.

Ordre de $x_i$	Puissances de $x_i$ de même ordre
5	2,3,4
10	3,7,9
14	3,5,9,11,13

$x_i^{\omega-1}$ , inverse de  $x_i$  est toujours du même ordre.

(1)

I. SAMUEL, Comptes-rendus Ac.Sc.Paris, t.282, série A,  
1976, p.289